

ORNAMENTER I UNDERVISNINGEN SYMMETRI

ved Hana Moraová* og Jarmila Novotná*

INTRODUKSJON

I denne enheten ser en på flerkulturelt innhold i ornamenter fra ulike kulturer og på muligheter til gjøre bruk av slike ornamenter i undervisningen. Det stilles spørsmål om hva slags matematikk en kan knytte opp mot disse, og hva slags tverrfaglige koblinger som kan gjøres innenfor undervisningsenheten. I tillegg kommer spørsmålet om denne undervisningen kan fremme integrering av innvandrelever i klasserommet?

Pilotering med lærerstudenter og lærere

Enheten ble først prøvd ut i et verksted med tsjekkiske lærerstudenter og lærere. På verkstedet ble deltakerne introdusert for hva slags utfordringer en kan møte når en underviser matematikk i multikulturelle klasserom. Målet med denne første utprøvingen var: 1) Å vise lærerstudenter og lærere hvor enkelt det er å ta inn multikulturelt innhold i matematikktimene. 2) Å få ideer om hva slags skjult matematikk som finnes i ornamenter. For å få dette til, presenterte lederne for verkstedet en rekke ornamenter fra ulike kulturer. Deretter ba de deltakerne jobbe med ornamentene og formulere så mange matematiske problemer som mulig.

Antatte matematiske emner inkludert i oppgavene

- Symmetri, rotasjon, translasjon, plangeometri og tesselering.
- Andre emner som dukket opp i løpet av verkstedet og som ble inkludert i oppgaver og problemstillinger var: proporsjonalitet, lineære funksjoner, forhold, kombinasjoner og det minste felles multiplum.

* Faculty of Education, Charles University in Prague, Czech Republic.

Mål for verkstedet

For deltakerne:

- Å undersøke løsnings- og læringsstrategier
- Å formulere problemer/ lage oppgaver
- Å diskutere disse problemene/oppgavene i grupper

For lederne:

- Å få større mangfold av matematiske emner knyttet til bruk av ornamenter
- Å få større utvalg av mulige multikulturelle problemer/oppgaver for bruk i klasserommet.

Hovedutprøvingen

ved Hana Moraová og Jarmila Novotná

1. Beskrivelse av aktiviteten

Aktiviteten var basert på konseptet “substantial learning environments – SLE” utviklet av Erich Wittmann (1995), som går ut på at et godt undervisningsmaterieell, bør ha en enkel start og et stort potensial for undersøkelser og utvidelser. Den enkle starten i dette tilfellet skulle være presentasjon av ornamenter med opprinnelse i ulike kulturer. Intensjonen var at minoritets elever skulle bli hørt og selv få presentere ornamenter typisk for sin kultur. Målet var å bryte ned stengsler mellom kulturen hjemme og den på skolen, og også mellom matematikk brukt hjemme og matematikk på skolen (Meaney & Lange, 2013). Deltakerne ble oppfordret til å komme med så mange oppgaver som mulig, knyttet til ornamenter. Å formulere spørsmål/problemer er en viktig komponent i læreplanen for faget matematikk, og er regnet som en essensiell del av det å gjøre matematikk (NTCM, 2000; Tichá, Hošpesová, 2010). Dette siste blir praktisert av matematikklærere nesten daglig når det er behov for supplement til oppgaver i læreboka.

Trinn 1 Deltakerne

- Introduksjon av multikulturelle problemer og tverrkulturell psykologi samt implikasjoner for matematikk i klasserommet.
- Diskusjon om tradisjonelle metoder og typiske oppgaver i undervisningen av symmetri.
- Aktivitet – symmetrier i små og store bokstaver i ulike alfabet og symmetri i ord.

Trinn 2 Deltakerne

- Aktivitet – ornamenter fra ulike kulturer
- Ulike typer ornament/mønster – symmetrisk vs. asymmetrisk, natur, geometri, linje, tesselering og rosett.
- Oppgave: Formuler et problem og/eller lag en plan for en leksjon med aktiviteter der du bruker ditt (eller et annet valgt) ornament. Hva slags matematiske tema er representert?
- Presenter problemet ditt/leksjonen din for andre deltakere.
- Diskuter planene og velg beste aktivitet.

Trinn 3a Deltakerne

- Forbered et siste utkast til leksjonen slik at den kan bli prøvd ut. Forbered nødvendig undervisningsmateriell og hjelpemidler.

eller

Trinn 3b Lederne

- Velg en av de foreslåtte aktivitetene.
- Lag et ferdig utkast til en større undervisningsenhet (flere undervisningstimer) som er fleksibel og som kan tilpasses ulike nivåer og ulike klassetrinn.
- Tilpass undervisningsenheten til valgt nivå og lag ferdig nødvendig materiell og hjelpemidler.

(Dette er det ideelle scenarioet for et verksted for lærerstudenter og lærere. I dette aktuelle tilfellet ble det endelige utkastet gjort ferdig av forskningsteamet/ lederne fordi det gikk for lang tid fra kurset ble holdt, til opplegget skulle prøves ut i skolen, se teksten under.)

Trinn 4 Utprøving av opplegget i skolen

- Det endelige opplegget ble prøvd ut i en valgt barneskole.
- Umiddelbar tilbakemelding fra elevene (omtrent 5 minutter).
- Intervju med lærer etter undervisningen.
- Skriftlige refleksjoner fra lærer etter aktiviteten.

Trinn 5 Utprøving av opplegget i en valgt utenlandsk skole

2. Oppdrag

a) Oppgaver formulert av deltakere

- Pytagoras' teorem: mål og regn med trekantene i de gitte ornamentene.
- Sammenlign linjesymmetri, rotasjon og translasjon. Hva er typisk for hvilket ornament?

- Bestem de ulike geometriske figurene du kan finne i et ornament og beskriv dem.
- Studer begrepet tesselering og finn hvilket ornament/mønster som kan brukes i en tesselering.
- Kopier ornamentene i et kvadratisk rutenett og se på arealene de utgjør. Bruk kvadratisk rutenett med ulike enheter og studer forholdene.
- Regn ut hvor stor del av arealet en farge utgjør,
- Hvor mye stoff med dette ornamentet ville du hatt behov for f. eks. for å kunne lage en kilt (skotskrutet mønster)?
- Finn det genererende elementet.
- Hvor mange symmetrilinjer er der i et gitt ornament?
- Det minste felles multiplum (i tilfellet med et indisk ornament).
- Hvor mange perler trengs det for å lage et segment av et indiansk ornament?
- Hvor mye bånd trengs det for å dekorere en vegg av gitte dimensjoner?
- Lappetepper og ornamenter - hva slags geometriske figurer er det mulig å bruke når en skal produsere et lappeteppe (patchwork)?
- Hvor mange tråder av hver farge behøver vi for å lage et segment med skotskrutete tøy?
- Tegn symmetriske ornamenter, kopier dem fra de originale eller la elevene skape sine egne ornamenter.

b) Undervisningsplan

Deltakerne på verkstedet gikk gjennom de ulike ideene og ble enige om å utvikle undervisningsenheten som er beskrevet under. Denne ble utviklet og utarbeidet i detalj, men for å kunne bli prøvd ut, ble den endra av lærer for å passe til skolens plan, til fagplanen til den aktuelle gruppa, og til behov elevene i klassen hadde.

(Materiell som ble brukt i undervisningsenheten finnes i vedlegg 1.)

Time 1

- Tittel: ORNAMENTER
- Repetisjon av emnet symmetri: se etter symmetrilinjer i ulike typer bokstaver (vedlegg 1) – 10 minutter
- Innledning: Presentasjon av ulike typer ornamenter i ulike kulturer (10 minutter)
- Hovedaktivitet
 - Vis ornamenter fra ulike kulturer

- Vis ulike former for symmetri og transformasjoner i ett eller to ornamenter.
- Gi hver elev et ornament og be dem finne alle symmetrilinjer.
- Be elevene finne, sette navn på og kopiere alle geometriske figurer som er symmetriske i ornamentet.
- Be elevene formulere en konklusjon om et typisk ornament fra en bestemt kultur
- Lekse: Ta med en gjenstand dekorert som et ornament hjemmefra eller ta med bilder av ulike ornamenter fra ferier.

Time 2:

- Innledning: presenter ornamentene som er tatt med. Hva slags typer av ornamenter er der? Hva slags linjesymmetri kan dere finne?
- Hovedaktivitet:
 - Gi hver elev ett av de tre ornamentene (keltisk, indiansk eller arabisk rosett) og et kvadratisk rutemønster med ulike skalaer (enheter).
 - Be elevene finne alle symmetrilinjer.
 - Be elevene finne antall kvadrater med farge i.
 - Be elevene regne ut arealet av ornamentet (regn med alle kvadrat med noe farge i).
- Oppfølging: Kopier følgende tabell på tavla:

Enhet på kvadratene	0.5 cm	0.75 cm	1 cm	1.25 cm	1.5 cm	2 cm
Areal						

Hva er forholdet mellom enhet og areal?

Undervisningsopplegget gjennomført på skolen

Aktiviteten ble gjennomført i en 5. klasse på en skole i Praha (ZŠ Fr. Plamínkové s RVJ).

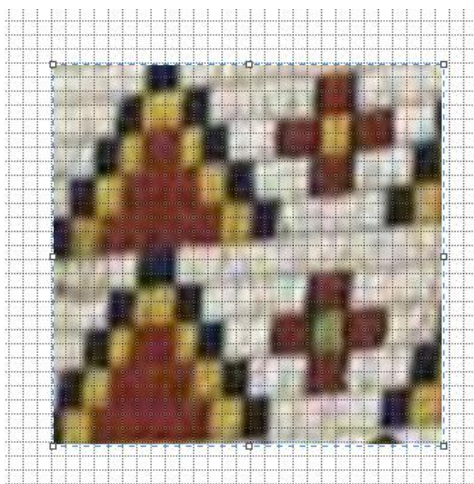
Forskningsteamet gikk nøye gjennom den tsjekkiske læreplanen for barnetrinnet (MŠMT, 2013, <http://www.plaminkova.cz/skolni-vzdelavaci-program>) for å se hva slags emner i den planlagte undervisningsenheten som kunne passe for 5. klasse. Tsjekkiske 5. klassinger har ennå ikke gjennomgått noe om symmetrier, men det er sannsynlig at de har en intuitiv kunnskap om emnet. De har lært å arbeide med kvadratisk rutenett, og kan bygge på begreper som omkrets og areal fra plangeometrien. Begrepet proporsjonalitet har de så langt ikke møtt. Teamet bestemte seg for å tilpasse opplegget og prøve det ut i to undervisningstimer.

Time 1

Timen startet med en introduksjon av ornamenter, så kom en diskusjon om ulike typer og former av ornamenter, kulturelle forskjeller, hva som er basiselementer og en diskusjon om indianske ornamenter laget av perler. Barna fikk utdelt kvadratiske rutemønstre (0,5 cm) og et indiansk ornament. De ble bedt om å kopiere det inn på rutemønsteret; nøyaktig kvadrat for kvadrat. Så ble de bedt om å telle opp de blå kvadratene, finne størrelsen på det blå krysset og de blå og gule figurene. Men dette kunne ikke bli brukt som en introduksjon til emnet areal, på grunn av enhetene i rutemønsteret.



Barna ble så gitt et rutenett der kvadratsidene var 1 cm, i tillegg til et nytt indiansk ornament. Dette var brodert, ikke laget av perler. Dette var laget av rektangulære, ikke kvadratiske elementer. To deler av ornamentet var kopiert til et kvadratisk rutenett (et rektangel var laget av tre ganger tre kvadrat). Barna ble så bedt om å kopiere disse figurene på et 1x1 cm rutenett.



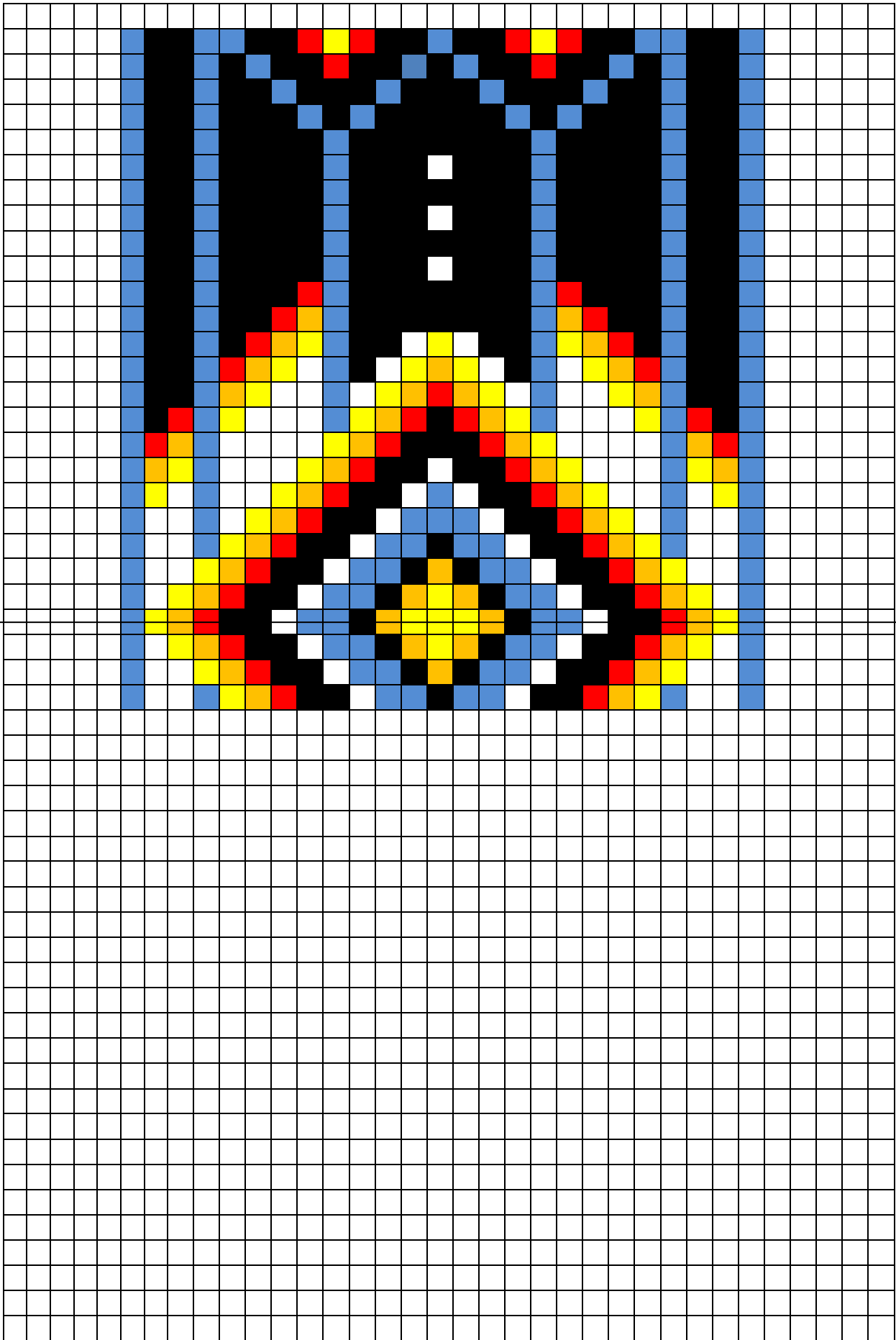
Siden arealet av kvadratene nå var 1cm^2 , kunne elevene lett finne arealet av de ulike geometriske figurene som de hadde kopiert (rektangel, to rektangler, kryss, pyramide osv.). Det samme var tilfelle med omkretsen.

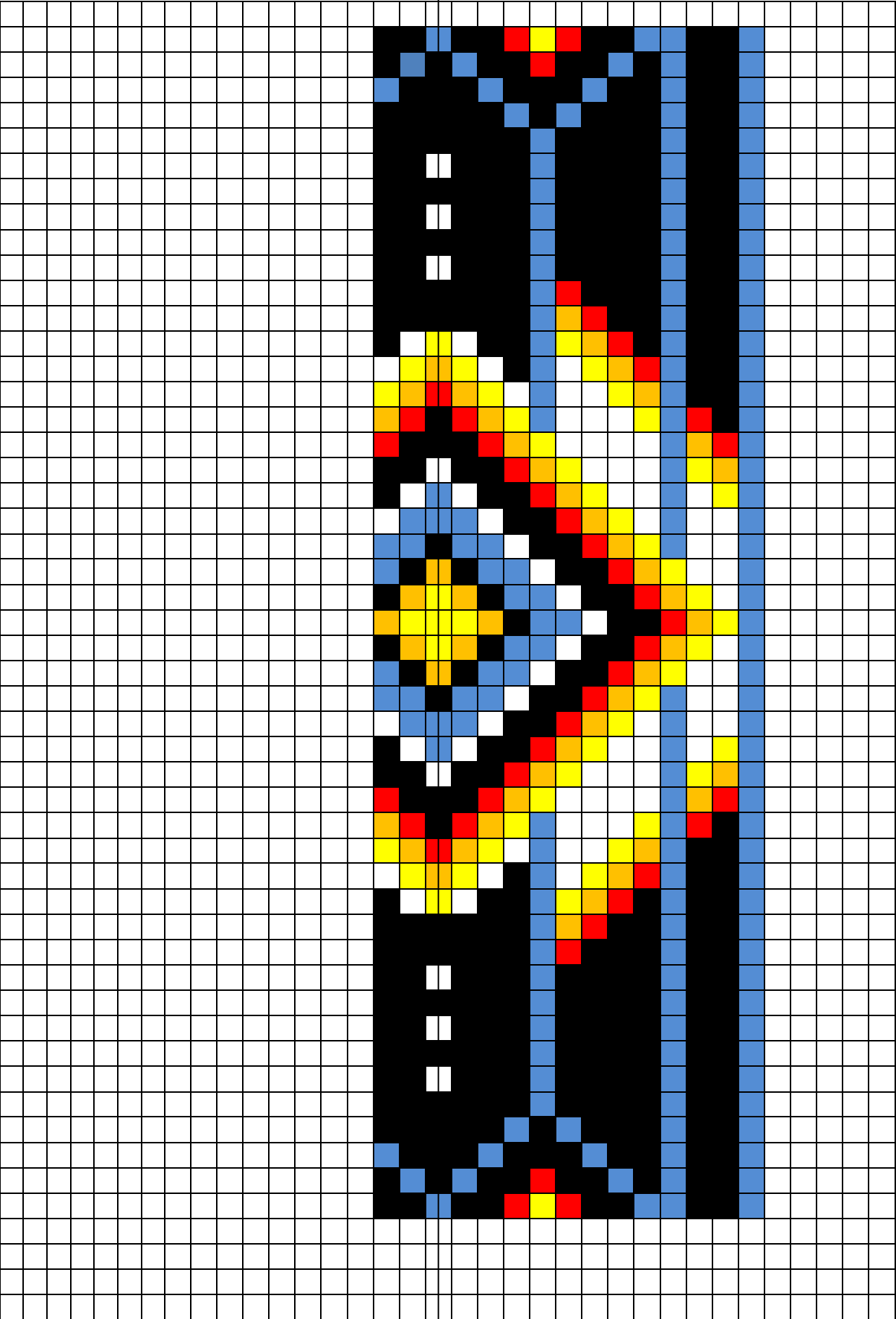
Time 2 – Arbeid med symmetrier (en kombinert kunst og matematikk time)

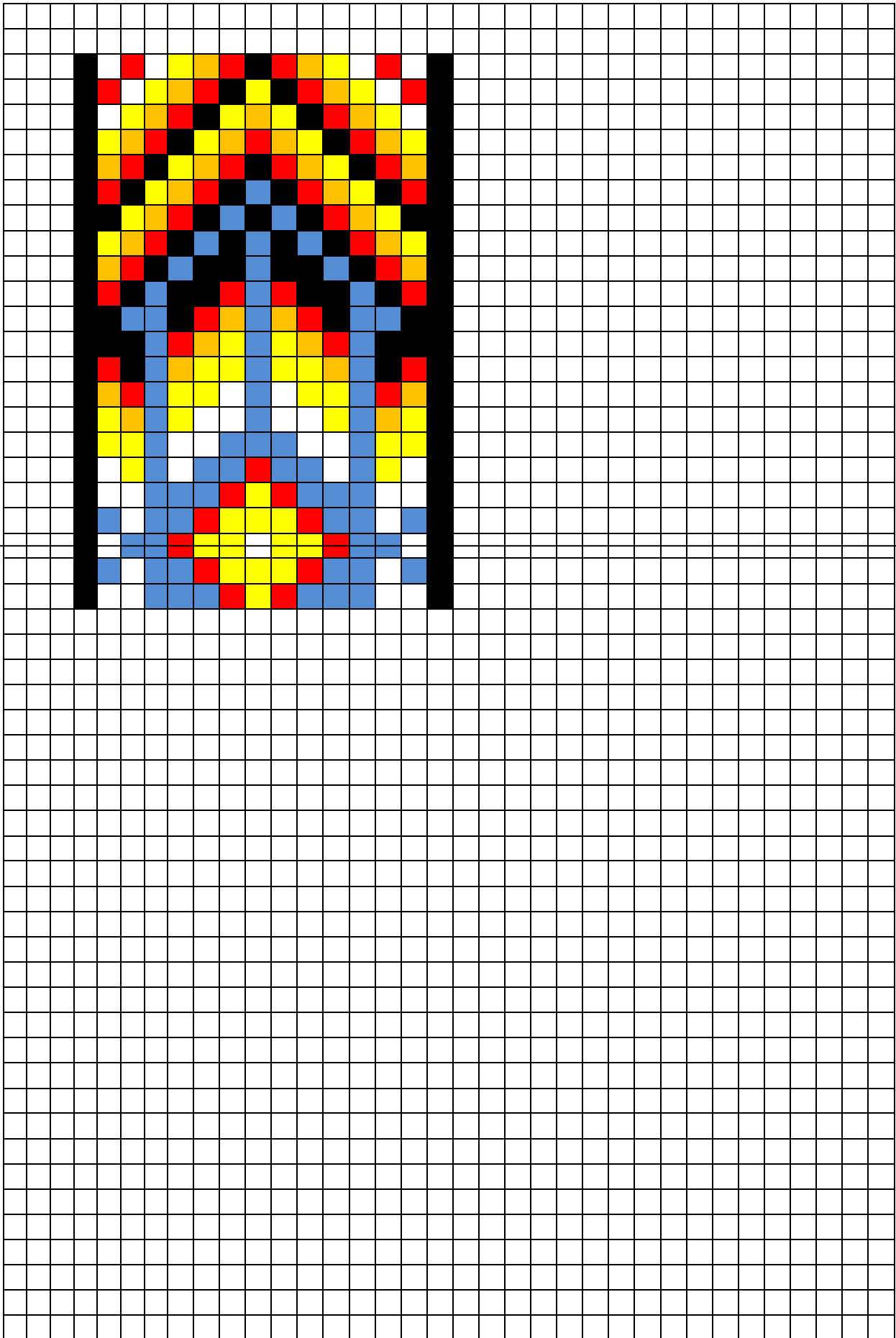
Barna fikk se to originale indianske ornamenter. De snakket om figurene de kunne se i mønsteret.

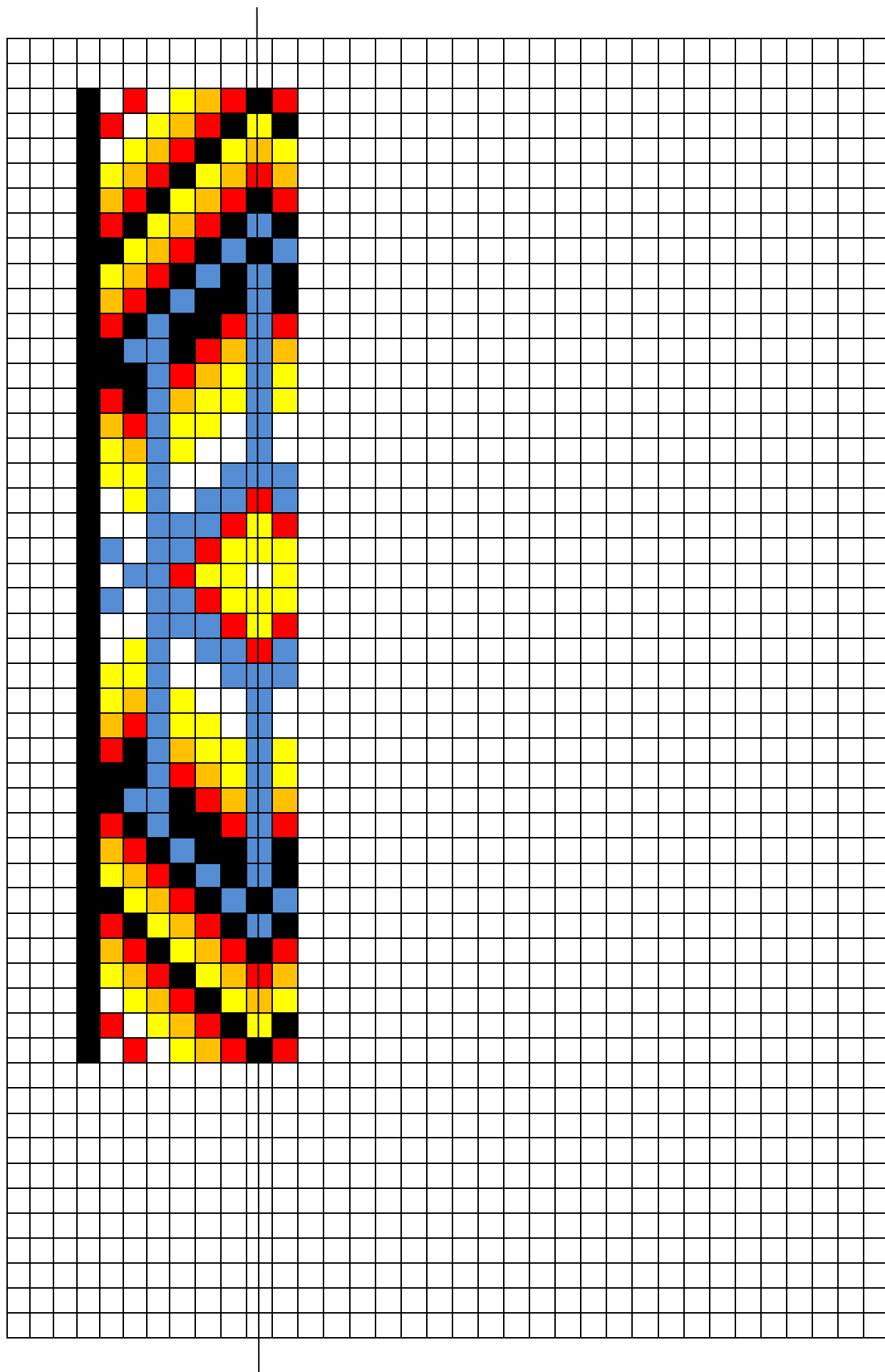


De fikk så en modell av et ornament der linjesymmetrien var indikert, og ble bedt om å fullføre mønsteret.









De brukte fargeblyanter, perler, tråd, etc. for å fullføre modellene av ornamentene.

Lekse: se på mønster/ornamenter dere har hjemme. Hvor er de? Hva slags typer har dere? Hva slags former, farger, materialer osv. finnes? Kopier dem eller ta bilde av dem. Vi kommer til å jobbe med disse i neste time.

Kommentar fra lærer som brukte opplegget

Læreren som brukte opplegget mente generelt sett at opplegget var motiverende for barna. Elevene var opptatt med oppgavene, og arbeidet for det meste hardt de to timene. Materiellet gav muligheter for differensiering siden det var mulig å fokusere på mer eller mindre kompliserte figurer, og ulike elever kunne få ulikt antall figurer hvor de skulle finne omkrets og areal. Læreren mente at det ville være lurt på dette trinnet å bare introdusere rutenett med 1x1 cm i alle aktivitetene, siden opptelling av ulike kvadrater da ville være mer matematisk meningsfullt fra starten. Hun poengterte også at i den første oppgaven burde elevene bli gjort oppmerksomme på at hvis de ikke starter med den sentrale blå figuren, men teller røde kvadrater for å tegne omrisset av det røde rektanglet, så vil de oftest finne komme feil ut, og de får ikke plass til det sentrale blå krysset. Da har de allerede brukt mye tid. For de som kom i den situasjonen var det ikke mye motiverende å starte på ny.

Andre utprøving

Antonella Castellini, Lucia Alfia Fazzino og Franco Favilli**

Forhåndsanalyse

Konteksten

Begge aktivitetene var designet for og utviklet av en gruppe studenter fra to ulike klasser ved "*Istituto Comprensivo 1*" i Poggibonsi (en provins til Siena) i uker med fleksibel undervisning. Kort fortalt så er det i denne perioden åpent for klassene å utføre faglige eller tverrfaglige aktiviteter og å utvikle prosjekter utenfor skolen. Gruppen bestod av 15 til 18 andreårs elever på ungdomskole.

Mål

Emnene som ble tatt opp i undervisningsenheten gav elevene muligheter til repetisjon av kjent kunnskap, men gav dem også anledning til å se dem i et nytt og mer kreativt perspektiv. Elevene opplevde en betydelig følelsesmessig merverdi av å jobbe med prosjektet. Grunn for dette var at opplegget gav elevene referanser til egen kultur og eget hjemland. I tillegg la opplegget grunnlag for nye arbeidsmetoder, som for eksempel problemløsning som ikke var blitt brukt i klassen tidligere for å utvikle matematiske ferdigheter.

** CAFRE – University of Pisa, Italy.

Det var fire årsaker til valget av opplegg:

- Å se på den virkeligheten med matematiske øyne.
- Å utvikle tverrkulturell forståelse, sammen med et ønske om å la elevene få kjennskap til sine kulturelle røtter.
- Å utvikle en positiv holdning til matematikk gjennom meningsfulle erfaringer, i tråd med de italienske nasjonale retningslinjene fra 2012.
- Å beskrive, sette navn på og klassifisere geometriske figurer i tillegg til å identifisere egenskaper og symmetrier. I tillegg er det et mål å sette elevene i stand til å reproducere figurene, et mål også i de nasjonale retningslinjene fra 2012.

Design

Det ble valgt å bruke verksted som metode, ikke bare som et fysisk sted, men som et klasseroms aktivitet der det å gjøre og det å resonnerer skulle gå hand i hånd. Verkstedet ble sett på som en undervisningssituasjon hvor meningen av matematiske objekter konstrueres av elevene selv, gjennom rike og stimulerende erfaringer.

Alle aktivitetene i undervisningsenheten var designet med referanse til de isometriske transformasjonene, et emne som var delvis introdusert til elevene året før. Emnet ble introdusert ved hjelp av et spill. En tegning eller et objekt ble plassert foran speilet, og ved å betrakte speilbildet, ble elevene i stand til å oppdage de viktigste kjennetegnene til aksesympetrien (Foto 1).

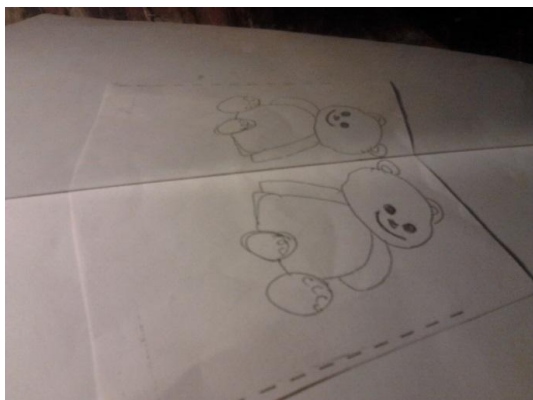


Foto 1

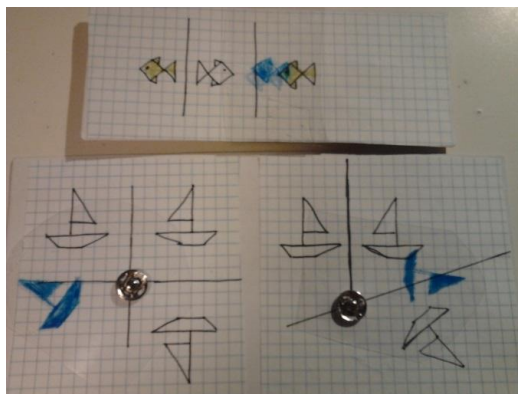


Foto 2

Neste skritt var å oppdage (sammensetningen av symmetrier med parallelle eller vinkelrette akser) de andre transformasjonene - translasjoner og rotasjoner - og finne ut hva som kjennetegner hver av dem. Etterpå måtte alle elevene lage dynamiske modeller som gjorde dem i stand til å representere disse geometriske transformasjonene. (Foto 2)

Sammenhengen mellom objekt og handling gjør det lettere for elevene å føle seg fri til å tegne og til å gjøre tolkninger. Dette er grunnen til at det blir så viktig å se, å observere og være i interaksjon med et dynamisk, ikke-statisk objekt.

Statiske objekter begrenser elevene og tvinger dem til å se bare ett aspekt slik at de får problemer med å analysere en situasjon fra ulike sider. De stimulerer ikke nysgjerrigheten, og framfor alt, de fremmer ikke undring eller matematisk argumentasjon som er en så viktig del av det å tenke matematisk. Derfor, i tillegg til de dynamiske modellene som elevene allerede var kjent med, ble det planlagt en ny aktivitet ved bruk av et 'speilrom' (vinkelen/rommet mellom to speil).

Undervisningsopplegget

Time 1

I den første timen ble to ornamenter eller mønster levert ut til elevene, en frise og en rosett. Elevene var delt inn i 4 grupper, hver gruppe på 4 til 5 elever. Elevene ble så bedt om å analysere mønstrene ved hjelp av et flatt speil, for å finne de isometriske transformasjoner som danner mønstrene.

Etter en kort forklaring, valgte gruppene en person som skulle presentere for de andre gruppene, de transformasjonene som ble funnet av gruppa. Målet var å få elevene til å reflektere over det de hadde lært tidligere, og få dem til å sammenligne resultatene fra de ulike gruppene. Hovedhensikten var likevel å få dem til å trekke konklusjoner fra materiellet, og så lære seg å bruke matematiske argumenter i diskusjon med andre.

Gruppa med frisen

Elevene startet med å studere frisen ved hjelp av det flate speilet: "Først holdt vi speilet horisontalt mot mønsteret (Foto 3), men mens vi så på dette, innså vi at en slik symmetri ikke var mulig siden en frise normalt er svært lang. Så vi satte speilet vertikalt mot mønsteret (Foto 4) og så at der er en aksesymmetri med kvadratet som enhet i mønsteret. Hvis vi ser på kvadratene a, b og c, så er det klart at der er en dobbel aksesymmetri med parallelle akser. Og da vi så nøyere etter, og så på figurene a og b som en helhet, da er der også en translasjon mot høyre. "(Foto 5, Foto 6, Foto 7)

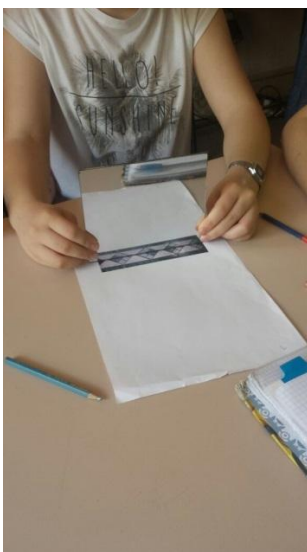


Foto 3



Foto 4

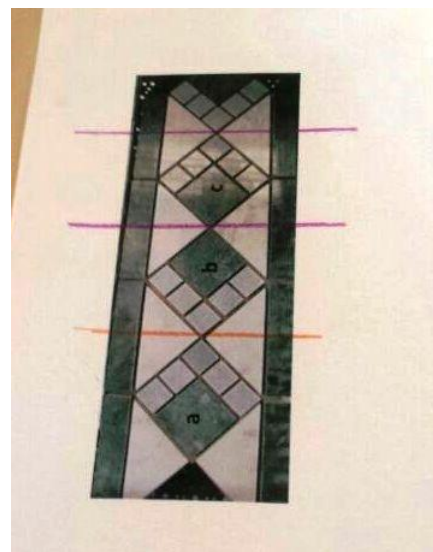


Foto 5

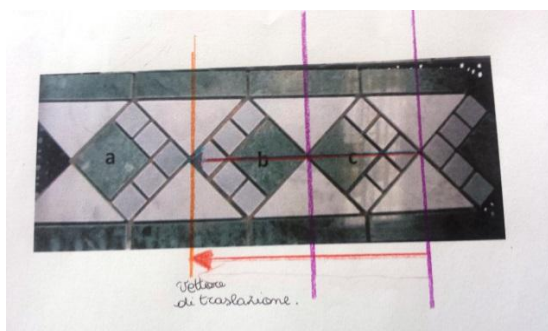


Foto 6

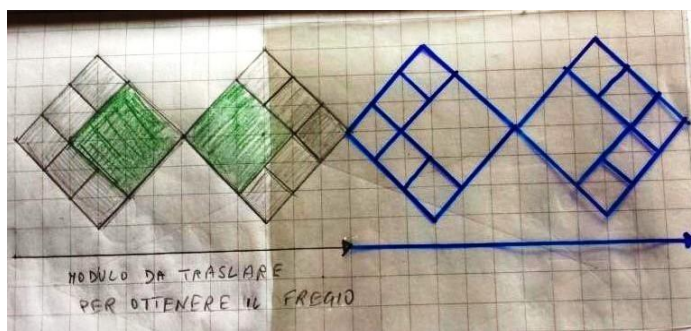


Foto 7

Kommet så langt, dukket et nytt spørsmål opp i gruppa: “Hvor lang er denne translasjonsvektoren?” Ved hjelp av den dynamiske modellen hadde de fått verifisert at lengden av translasjonsvektoren er nøyaktig dobbelt så lang som avstanden mellom de to parallelle aksene som var årsak til translasjonen.

Gruppa med rosetten



Foto 8

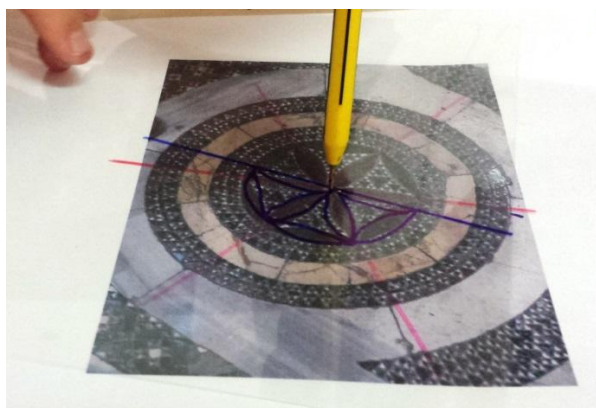


Foto 9

Elevenes kommentarer er sitert direkte: “I dette mønsteret så vi med en gang at vi har aksesymmetrier med tilhørende akser (Foto 8). Så pekte A. ut for oss at der også fins en rotasjon, som er produsert ved å kombinere to symmetrier med tilhørende akser. Så vi bestemte oss for å tegne symmetriaksene og fant sentrum i rotasjonen. For å sjekke rotasjonen brukte vi den dynamiske modellen vår” (Foto 9).

Det som er interessant her, er at elevene viser til enheten i rosetten og symmetriaksene for å forklare hvordan de tenker, og at de bruker den dynamiske modellen for å fjerne eventuell tvil.

I denne første timen var både speilet og den dynamiske modellen verdifulle hjelpemidler når elevene skulle forklare hva de hadde observert.

Etter at alle gruppene hadde fortalt om sine oppdagelser av ulike isometriske transformasjoner, fikk elevene i lekse å skrive en individuell oppsummering av arbeidet som var gjort i klassen (i loggbok). I tillegg skulle de se om de kunne finne ting eller stoff med mønster typisk for deres hjemland, eller som var tatt hjem fra besøk i andre land. Disse skulle de så ta med på skolen neste dag.

Time 2

Alle gjenstandene elevene hadde tatt med seg ble gjort tilgjengelige for hele klassen. Hver gruppe valgte seg så en av dem: et tøystykke fra Senegal (det flotteste av alle i elevenes øyne, sannsynligvis siden det var så fargerikt og hadde flere ulike dekorasjoner) og et annet stoff som ei jente i klassen brukte hjemme til å dekke sofaen, også dette fargerikt med mer vanlig dekor. Det som ikke ble valgt var forskjellige typer blonder (laget av bestemødre), keramiske plater og kar. De siste var det ikke så mange av, og de var heller ikke særlig fargerike

Denne oppgaven ble så gitt til hver gruppe:

1. Grunngi valget av gjenstand.
2. Identifiser de isometriske transformasjonene ved hjelp av speil.
3. Gjengi det valgte mønsteret på to kvadratiske ark som du har fått.
4. Finn mønsteret som går igjen og som skaper ornamentet
5. Presenter dekoren dere har valgt for de andre gruppene, og vis det genererende mønsteret med nøyaktige instruksjoner om hvordan du kan gjenskape det fra basiselementer.

Kløvergruppa

Medlemmene i gruppa hadde valgt ornamentet med kløvere (Foto 10) og grunngav valget med at det var enkelt og pent”. Men som de skrev i rapporten, de hadde tatt feil i starten: “Vi tenkte bare på enkle symmetrier både i kronbladene og i mønsteret ellers, fra rute til rute, men så, da vi studerte det nærmere med speilet, så vi den lille blomsterstilken, og fant ut at der ikke var noen aksesymmetri, men rotasjonssymmetri. (...) For å forstå det bedre, brukte vi kunststoffet og trykknappen (den dynamiske modellen)”.

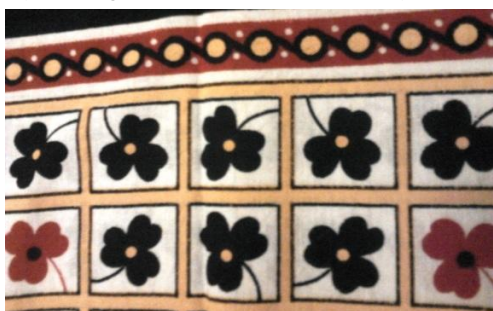


Foto 10

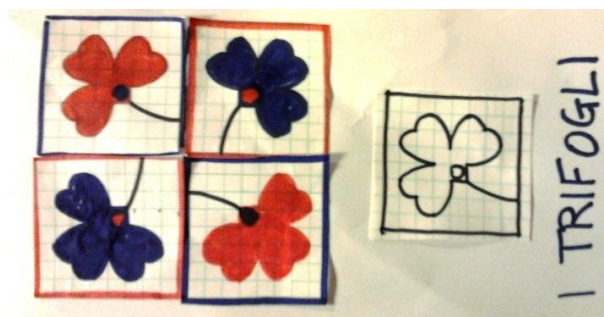


Foto 11



Foto 12

Arbeidet som er gjort (Foto 11- 12) viser hvordan de har undersøkt saken, og hvordan speilet har gjort det lettere for dem å finne de isometriske transformasjonene i dekoren. Det viser også hvor nyttig den dynamiske modellen var for dem når det gjaldt rotasjonen.

Fra grunnmønsteret, med suksessive 90 graders rotasjoner, var de i stand til å representere dekoren i stoffet. Det er interessant å legge merke til fargen som ble valgt for markere de to matchende figurene i rotasjonssymmetrien.

Bordeggruppa



Foto 13



Foto 14

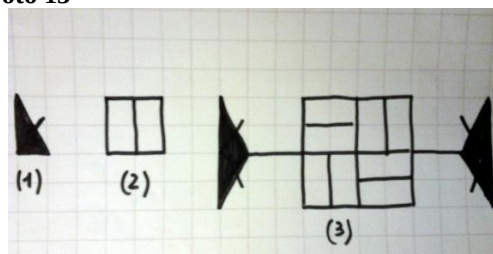


Foto 15

Gruppa som valgte dekorasjonen med små rammer (borde) (Foto 13) sa at de valgte dette siden "de så ut som de små border de laget i de første barneskoleårene". Elevene kopierte mønsteret med letthet og markerte også translasjonen (Foto 14) som gjorde det mulig for dem å rekonstruere hele dekoren. Men etter et øyeblikks begeistring over hvor fort alt var gjort, la de merke til dekoren i midten "som var laget av små rektangler". Elevene fant ut at det fantes også andre symmetrier. Spesielt la de merke til et par rotasjonssymmetrier eller en serie av 90 graders rotasjoner. De var så sikre på at der ikke fantes andre symmetrier og startet å skrive punktvis instruksjoner for de andre, slik at de også kunne reproducere den lille rammen (borden). Men mens de skrev, fikk de øye på enda en dekor, den "svarte stjerna i midten" (nummer 1). Den viste seg å ha samme egenskapen – dobbel rotasjonssymmetri. Dette førte til mange diskusjoner: "Hvordan gjør vi det? Må vi gi tre forskjellige instruksjoner? En for hver av de to mønstrene, og en for den lille rammen på samme tid? Og hva er da den gererende mønstrenheten?" Elevene ble enige å lage tre oppskrifter til klassekameratene sine. De skrev tre instruksjoner; en for hvert mønster som vist i foto 15. To for å reproducere motivet i sentrum ved hjelp av rotasjoner og en for selve rammen ved hjelp av translasjoner.

Rombegruppa

Valget av dette mønsteret ble grunnlagt med at "de er svært fargerike, men der er også kurver og rette linjer, med andre ord to ulike måter å dekorere på". Det ble også dette som gjorde det vanskelig for gruppa å presentere stoffmønsteret på papir. (Foto 16)

og gjorde det nødvendig med hjelp fra lærer. Elevene innså at bare fire 90 graders rotasjoner er nødvendige for å gjenskape mønsteret, og det er enkelt å identifisere og kombinere den grunnleggende mønsterenheten (Foto 17, 18).

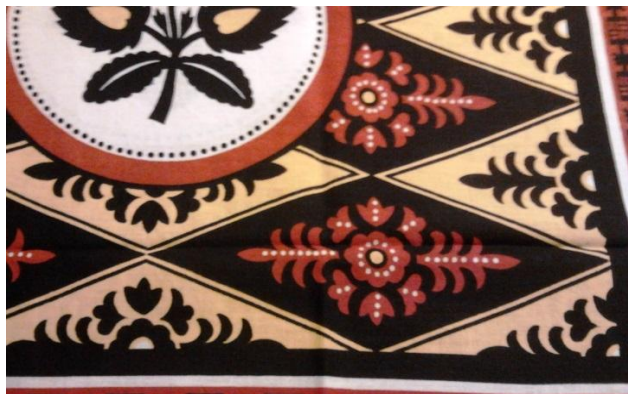


Foto 16



Foto 17



Foto 18

Rosettgruppa

Gruppa grunnlagt valget med at rosettmønsteret (Foto 19) minnet dem om juletegninger. Men elevene ble lurt av mønsteret; de greide ikke å finne basisenheten, eller startmønsteret. De kunne se symmetriene, men bare i to par av mønsterelementene. De gjenkjente også rotasjonene, men kunne ikke forklare hvordan de kunne få nytte av dem. De diskuterte mye om det lot seg gjøre å dele opp dekoren, skille den ene delen med et lite kvadrat, fra resten. De prøvde å bruke ett mønster, så prøvde de et annet til de til slutt fant ut at “vi kan arbeide med tre mønstre for å gjenskape hele rosetten. To av dem må roteres 90° fire ganger og det tredje 45° åtte ganger (Foto 20, Foto 21)

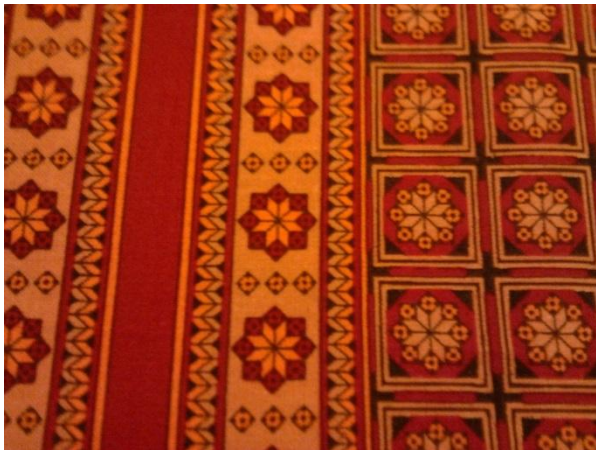


Foto 19



Foto 20



Foto 21

Time 4

En ny aktivitet ble introdusert. Den ble kalt:

Fra 'speilrom' til proporsjonalitet

Vurder mønstrene dere laget sist time og finn de som førte til en rosett (Foto 22).



Foto 22

Plasser mønstrene, et om gangen, i 'speilrommet' og fortell hvor mange mønstre som er nødvendige for å gjøre ornamentet (rosetten) komplett (Foto 23 a, b, c).



Foto 23 a

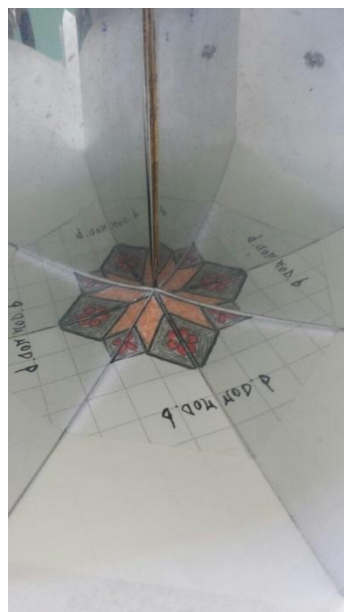


Foto 23 b

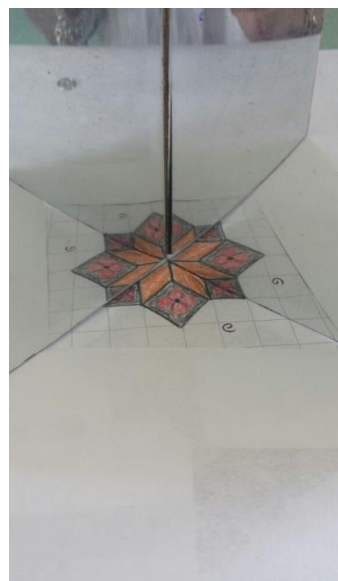


Foto 23 c

Elevene starter med å sette speil over mønster a. Vinkelen mellom speilene er 90° . Da ser de det originale mønsteret fire ganger. (Tre er reflektert og ett er det originale). Til sammen danner de en blomst, en komplett dekorasjon. I mønster b, finner de ut at om de setter speilene sammen med en 45° vinkel, så får de åtte gjengivelser av det originale mønsteret. Noen kommenterer at dette er en dobling fra mønster a, mens vinkelen har minka, den er faktisk halvert.

Denne kommentaren stimulerer nysgjerrigheten til elevene som begynner å prøve ut andre deler av ornamentet. “La oss prøve med en halv rosett, vi får faktisk bare to gjengivelser”. Ut fra dette kommer påstanden at dersom vinkelen mellom speilene minker, øker tallet på gjengivelser av det originale mønsteret.

Lærerne oppfordrer da elevene til å undersøke dette videre. De foreslår at elevene bruker en penn eller noe liknende og gradskive til å måle vinkelen mellom speilene. De foreslår også at de lager en tabell med en kolonne for vinkelstørrelse og en for antall bilder av det opprinnelige mønsteret. Vinkelen må ha en størrelse som går opp i 360° . I tabellen vil det da ikke bare være par som (90, 4), (180, 2), (45, 8), men også par som for eksempel (30,12) og (40,9). Tabellen vil klart vise forholdet *vinkelstørrelse* $\leftrightarrow$ *antall bilder*. Det er enkelt å se at om vinkelen halveres, så dobles antall bilder, og hvis vinkelen tredeles, tredobles antall bilder. Elevene kan derfor observere at produktet av vinkelstørrelsen og antall bilder er konstant lik 360.

På denne måten fikk elevene intuitivt og gjennom observasjoner og utregninger oppdage loven om omvendt proporsjonalitet.

Etterpå, bestemte lærerne seg for å be elevene å representere tabelldataene sine som punkter i et koordinatsystem, og så dra linjer mellom dem. Målet var at elevene skal få oppdage at punktene kan bli sett på som punkter på en kurve. Denne kurven kjenner de ennå ikke til; del av en hyperbel.

Men så stilte elev B. spørsmålet: “Hvorfor starter grafen i 10 grader? Hvis jeg lukker rommet mellom speilene, så er vinkelen 0 grader, hva er det som skjer? Jeg kan ikke se noe, så jeg får heller ingen speilbilder, så der er 0 bilder...men da virker det ikke, det er noe galt”. Dette er et eksempel på hvordan en elevs tvil kan bli en ressurs for de andre! Lærerne foreslo da at elevene skulle plassere en bit av en snor i rommet mellom speilene (speilrommet) og så lukke dette rommet sakte, mens de nøye følger med på hva som skjer. Dette får elevene til å innse at når speilrommet lukkes, så er ikke antall bilder null, men de ser ut til å bli uendelig mange. “Faktisk kan vi ikke se dem fordi de er inni!” Igjen lar den dynamiske gjenstanden oss utforske et viktig grensetilfelle, som det ikke er enkelt å forklare eller å forstå ved hjelp av bare aritmetikk, siden det er umulig å dele med null. Gjennom denne aktiviteten blir det derimot slik at elevene får en mulighet til å ta inn over seg noe av ideen om uendelighet, og få en forståelse av at å dele på null er en umulighet.

Time 4

Kunstnerisk tesselering

Elevene har allerede arbeidet med tesseleringer i planet, og vet hvilke regulære polygoner som gjør det mulig og hvorfor det er slik. En litt modifisert versjon av denne aktiviteten blir deretter foreslått for elevene med mål om å frigjøre deres "kunstneriske kreativitet".

Elevene blir bedt om å klippe ut en del av et kvadrat og så plassere det på motsatt side. På denne måten får de et mønster som ved gjentatte translasjoner, skaper et golv. Den samme aktiviteten kan bli foreslått også ut fra andre polygoner, slik som den likesida trekanten, eller parallelogrammet. Hver enkelt elevs kreativitet omskaper det mønsteret de startet med til et nytt og svært personlig golv (Foto 24, Foto 25, Foto 26).

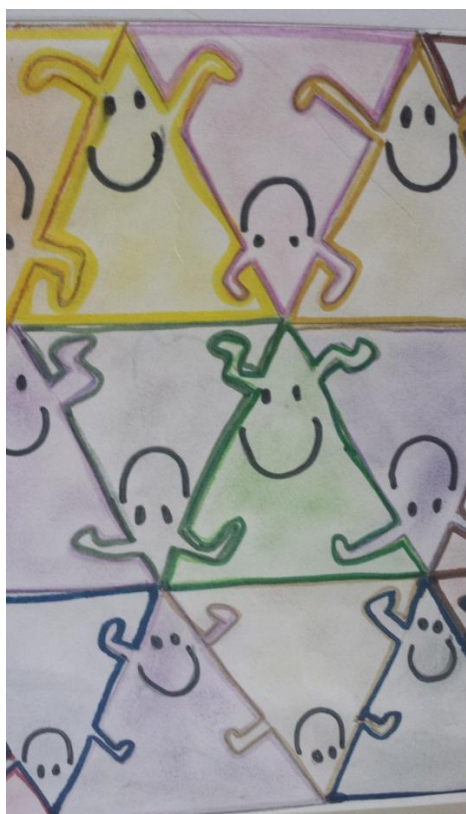


Foto 24



Foto 25



Foto 26

Time 4

Kunstnerisk tesselering

Elevene har allerede arbeidet med tesseleringer i planet, og vet hvilke regulære polygoner som gjør det mulig og hvorfor det er slik. En litt modifisert versjon av denne aktiviteten blir deretter foreslått for elevene med mål om å frigjøre deres "kunstneriske kreativitet".

Elevene blir bedt om å klippe ut en del av et kvadrat og så plassere det på motsatt side. På denne måten får de et mønster som ved gjentatte translasjoner, skaper et golv. Den samme aktiviteten kan bli foreslått også ut fra andre polygoner, slik som den likesida trekanten, eller parallellogrammet. Hver enkelt elevs kreativitet omskaper det mønsteret de startet med til et nytt og svært personlig golv (Foto 24, Foto 25, Foto 26).

Elevene som etter en kort forvirring om hvordan mønsteret skulle lages, viste virkelig stor glede av å skape nydelige golv, og de viste også at de hadde fantasi og kunstnerisk forståelse.

Mens det viste seg enkelt å starte med kvadrat og parallellogram, var det vanskelig å begynne med en likesida trekant. "Hvor var det nå utklippet skulle plasseres for å

skape et golv? Er det ok å sette det inn på en av de andre sidene? Eller, er det nødvendig å plassere det på samme side som det er tatt fra?” Slike spørsmål kom spontant og førte til god diskusjon med gode argumenter. Enda en gang viste det seg at følelsesmessige og meningsfulle refleksjoner oppmuntret til spontane og interessante spørsmål. Når disse ble riktig håndtert av lærer, skapte det muligheter for å bryte ny grunn eller til å skape nye veier inn til det som allerede er kjent, men nå med nytt perspektiv. Nye muligheter kan slik bli skapt for kontinuerlig læring.

Konklusjon

Vi er overbevist om at det er et sterkt behov for å endre holdninger til matematikk, og at det bør fremmes “en positiv holdning til matematikk gjennom meningsfulle erfaringer” som det sies i de italienske nasjonale retningslinjene fra 2012. Derfor er det viktig å gjøre mer enn å overlevere en rekke begreper og informasjon som ofte er fragmentarisk. Lærere bør stimulere elevene til å stille spørsmål og formulere problemer, noe som kan være med på å øke motivasjonen og bidra til at elevene erfarer at de gjør nye oppdagelser.

Undervisningsopplegget beskrevet ovenfor passer innenfor en slik ramme. Det gjøres bruk av verkstedsaktiviteter på en slik måte at læringen er reelt elevsentrert med fokus på deres behov. Eleven er en utforsker og får slik muligheten til å identifisere, akseptere, konfrontere og løse nye problemer, både individuelt og i grupper.

Utviklingsenheten er basert på tre metodologiske hjørnesteiner:

1. Å sette problemer i en kontekst;
2. Å få elever til å stille spørsmål;
3. Å arbeide i grupper slik at det faktum at elever er ulike, blir en ressurs for hele klassen, og at læringsmiljøet blir mer og mer inkluderende

Lærere har mange problemer å forholde seg til; som for eksempel å takle umotiverte elever, å arbeide i sosialt ikke-homogene og multikulturelle klasser. Det er derfor nødvendig å planlegge kurs som lar elevene se virkeligheten fra ulike perspektiver, og som gir dem mulighet til å utvikle større selvtillit.

Denne undervisningsenheten gav lærerne mulighet til å møte behovene til dagens elever uten å gi slipp på undervisning av basisbegreper i faget. Selv om matematikkfaget ofte er sett på som et abstrakt fag, er det mulig å få det nærmere elevene og deres virkelighet. Bruk av dagligdagse gjenstander, og også det å knytte det til ulike kulturer som det dekorerte tøyestykket fra Afrika, gir faget en følelsesmessig dimensjon som ikke må undervurderes. Selv det å lage dekorasjoner selv, en aktivitet som gjør studenten fri til å eksperimentere og bruke sin fantasi, fører også inn en emosjonell dimensjon som er viktig fordi læring er vanskelig hvis ikke følelsene er positive. Gjennom gruppearbeid, derimot, lærer elevene å forsvare sine antakelser, og til å endre disse når de andre i gruppa argumenterer klart og velbegrunnet.

Hele aktiviteten kan derfor sies å være basert på grunnleggende aspekter av læringsprosessen. Den krever at elevene er aktive, konstruktive, samarbeidende og at de reflekterer over kontekst og prosess. Sett slik, så legger opplegget til rette for at elevene utvikler gode kognitive ferdigheter.

Tredje utprøving

ved Andreas Ulovec og Therese Tomiska

Generell informasjon

Undervisningsopplegget ble prøvd ut av en kvinnelig matematikklærer med fem års erfaring som lærer ved en videregående skole i nærheten av Wien. Det østerrikske prosjektteamet sendte materialet til lærer ca. 3 uker før det skulle brukes. Lærer underviste en klasse (14-15 år), en klasse (15-16 år), en klasse (16-17 år) og en klasse (17-18 år) hvor opplegget kunne prøves ut. Etter et møte med teamet bestemte hun seg for å prøve ut første leksjon i en vanlig time i det som etter norsk system var en 8. klasse (50 minutter). Andre leksjon ville hun ta i en klasse (50 minutter) med 8 elever (17-18 år). Her ville hun bruke feltarbeid som læringsmetode. Tre av elevene i denne klassen var innvandrererelever. Den første leksjonen ble observert, mens leksjon 2 ble filmet og observert av en fra det nasjonale teamet.

Utprøving i klassen

Læreren presenterte emnet i første leksjon ved å ta med seg private gjenstander fra Japan, Sør Afrika, og USA. Elevene dannet par og ble bedt om å finne symmetrier og geometriske figurer, før de til slutt ble bedt om å sammenligne symmetriene og figurene i de ulike gjenstandene fra ulike land. Hver gruppe skulle så presentere kort for hele klassen hva de hadde funnet, mens de andre noterte. Til slutt ble elevene bedt om å ta med seg ornamenter eller bilder av ornamenter fra ulike kulturer til timen etter, slik det var foreslått i opplegget. Elevene kom da med argumenter om at verken de eller familiene deres hadde passende ornamenter eller bilder av slike hjemme. Verken lærer eller elever så det som hensiktsmessig at lærer skulle ta med flere av hennes gjenstander, så elevene foreslo at de heller skulle gå ut i naturen og ta bilder av symmetrier eller geometriske figurer de kunne finne i blomster og planter. Læreren argumenterte da med at hvis symmetrier i naturen var av interesse for elevene så ville det være bedre å gjøre et feltarbeid i andre leksjon enn å se på bilder. Det ble derfor bestemt at time 2 skulle endres slik at klassen skulle gå ut sammen for å se på symmetrier i naturen, og ta bilder for å diskutere symmetrier og enheter i klassen senere. Denne siste delen i klasserommet var ikke med i piloteringen).



Mønstre fra Japan, Sør Afrika og USA

Andre time begynte med at lærer minnet elevene om de ulike typene symmetrier og figurer, i tillegg til spesielle vinkler (f. eks fra Fibonacci tallene). Deretter gikk elever og lærer ut i nærheten av skolen for å se etter symmetrier og geometriske figurer både i naturlige og kunstige gjenstander. Elevene så først etter forekomster av spesielle vinkler og planter. Det gikk ikke lenge før de fant ut at 137.5° var en hyppig vinkel i en rekke plantearter, noe som imponerte elevene. Elevene tok bilder av plantene for bruk i klasserommet.



Foto 4. Leting etter spesielle vinkler på en tistel

De fortsatte å se etter symmetrier, spesielt speilsymmetrier. Elevene var for det meste i stand til å fastslå at planter og gjenstander viste tegn på symmetrier, men de kunne ikke si fastslå hva slags symmetrier. Det resulterte ofte i at elevene pekte ut symmetrier, og fikk lærer til å forklare hva slags symmetri det var.



Speilsymmetri på et grasstrå

Elevene diskuterte så hvor eksakte disse symmetriene er. Læreren brukte denne muligheten til å peke på at virkelige objekter aldri er eksakt symmetriske matematisk

sett, enten de er kunstige som de hun hadde med seg timen før, eller naturlige som et grasstrå. Hun poengterte at det er derfor modellering kommer inn i bildet.

Mot slutten av timen, ble også kunstige gjenstander (reklamesøylar og T-skjortemønstre) inspirert. Lærer og elever diskuterte om mønstrene eller formen på reklamesøylene hadde en kulturell og/eller praktisk opprinnelse. Mange av T-skjortemønstrene var fotografier, og de hadde ulik kulturell opprinnelse uten at elevene (ifølge dem selv) visste dette da de ble kjøpt. Læreren ba elevene finne ut til neste matematikktime, hva slags kulturell opprinnelse og kulturell betydning de fotograferte T-skjortemønstrene deres har.



Kulturelle mønstre på elevers T-skjorter

Timen sluttet i klasserommet hvor lekse ble gjentatt.

Konklusjoner

Utprøvingen av opplegget viste at selv om undervisningsopplegget er moderert og – i det minste overfladisk sett – beveger seg bort fra det tverrkulturelle aspektet, så er det lett å bringe dette aspektet inn igjen ved å henvise til mønstre på elevenes hverdagslige gjenstander og at disse har forbindelser til ulike kulturer.

Konklusjoner etter tre utprøvnings

ved Hana Moraová og Jarmila Novotná

De foreslåtte og utprøvde aktivitetene er av tydelig flerkulturell natur. Lærerne kan bruke trykksaker, materiell fra Internett, eller dagligdagse gjenstander som vi omgir oss med. Uansett formen på disse, så aktiviserer bruk av disse gjenstandene elevene, det motiverer dem til kreativ tenkning og til å søke etter sammenhenger, og det utvider deres perspektiver. Det at svært ulike ornamenter og mønstre er typiske for ulike kulturer, og at disse ofte blir brukt til å dekorere dagligdagse gjenstander, gjør at minoritets elever blir hørt. Det at de kan ta med seg innhold fra egen kultur og motiver fra egne hjem inn i klasserommet, gir læreren en mulighet til å vise at matematikken er universell.

Erfaringen fra de tre piloteringene viser at materiellet kan brukes på en svært fleksibel måte. Det kan tilpasses behovet til og kunnskapen om ulike grupper og enkeltelever. Det kan brukes direkte i klasserommet, i form av ulike prosjekter og som individuelt arbeid utenfor skolen. Det er av sterkt tverrfaglig karakter og kan brukes samtidig i flere fag. De foreslåtte miljøet og aktiviteten oppfyller kriteriene til Wittmanns "substantial learning environment- SLE (1995).

Utprøvingene av opplegget viser at dersom aktivitetene er godt planlagt og utviklet, så bidrar de til inkludering av elever med ulik kulturell bakgrunn og tradisjoner, og også av elever med svært ulike interesser. Hvis læreren gir de sjansen, vil hver elev finne sin "cup of tea", og ved å bidra med sine egne erfaringer vil de være til nytte for alle. Det er opp til læreren hvordan aktiviteten blir presentert for elevene og hvor mye frihet de vil bli gitt mens de arbeider.

Referanser

- Meany, T. and Lange, T. (2013). Learners in Transition between Contexts. In Clements, M.A., Bishop, A.J., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F.K.S. (Eds.), *The Third International Handbook of Mathematics Education*, Vol. 27 (pp. 169-202). Springer.
- NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM
- Tichá, M. and Hošpesová, A. (2010). Tvoření úloh jako cesta k matematické gramotnosti[Problem posing as a way to mathematical literacy, in Czech]. In *Jak učit matematice žáky ve věku 11 – 15let; sborník příspěvků celostátní konference*(pp. 133-145). Plzeň: Vydavatelství servis.
- Wittmann, E.Ch. (1995). Mathematics education as a "Design Science", *Educational Studies in Mathematics*, 29, 355-374.
- Framework Education Programme for Elementary Education* (2013). Prague: MŠMT.

Vedlegg 1

Czech Matematika, МАТЕМАТИКА,

Hebrew הקִּיטְמִיתָּמ

Chinese 數學

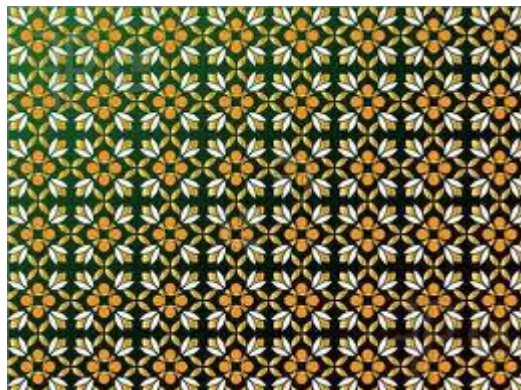
Japanese 数学

Russian Математика, МАТЕМАТИКА

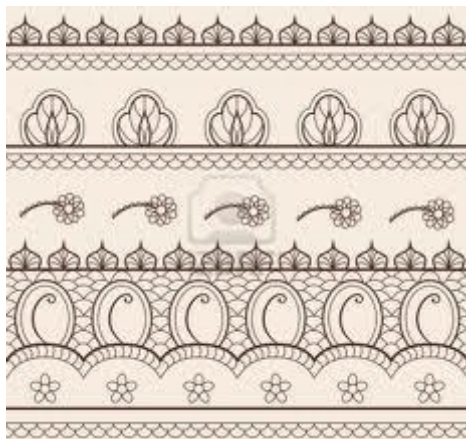
Greek Μαθηματικά, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Persian تایضایر

Vedlegg 1 – Mønstre / Ornamenter fra www.googleimages.com Arabiske mønstre



Indiske mønstre



Mønstre fra romfolket





c



Moraviske mønstre



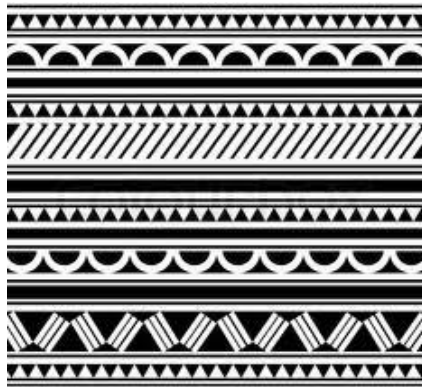
Indianske mønstre (Amerika)



Aboriginske mønstre



Polynesiske mønstre



Skotske mønstre

