

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΕ ΕΝΑ ΑΡΧΑΙΟ ΜΑΓΙΚΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

από τους Marie-Hélène Le Yaouanq\* και Brigitte Marin\*

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι η ταυτόχρονη ενασχόληση των μαθητών με το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και τη μαθηματικής γλώσσα, σε επίπεδο λεξιλογίου αλλά και σε επίπεδο διατύπωσης ενός μαθηματικού συλλογισμού, προφορικά και γραπτά. Επίσης, ο σχεδιασμός της ενότητας προβλέπει τη συζήτηση στην τάξη για το γραπτό και προφορικό σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιούσαν διάφορες χώρες στο παρελθόν, το σύστημα που χρησιμοποιείται σήμερα, όπως επίσης τη συμβολή ποικίλων πολιτισμών στη συγκρότηση των μαθηματικών, όπως εμφανίζεται στην Ευρώπη.

Η ενότητα βασίζεται στο αρχαίο μαγικό τετράγωνο που ανακαλύφτηκε το 1956 (βλ. την παρακάτω εικόνα)



[http://home.nordnet.fr/~ajuhel/Grenier/car\\_mag.html](http://home.nordnet.fr/~ajuhel/Grenier/car_mag.html)

\* πανεπιστήμιο UPEC University, ESPE, Créteil (Γαλλία).

## ΒΑΣΙΚΗ ΠΙΛΟΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

από τους Marie-Hélène Le Yaouanq και Brigitte Marin

### Παρουσίαση της ενότητας στο πλαίσιο επιμόρφωσης εκπαιδευτικών

Μια πρώτη φάση της πιλοτικής εφαρμογής της ενότητας υλοποιήθηκε σε πλαίσιο επιμόρφωσης εκπαιδευτικών για τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στην τάξη. Δόθηκε στους εκπαιδευτικούς το αρχαίο μαγικό τετράγωνο στη αρχική του μορφή (βλ. φωτογραφία παραπάνω). Οι επιμορφούμενοι κλήθηκαν να αναγνωρίσουν τους αριθμούς που αναπαριστούσαν τα σύμβολα αποδίδοντάς τα στην τωρινή μορφή των αριθμητικών συμβόλων.

Καθώς οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δε γνώριζαν τους αραβικούς αριθμούς που εμφανίζονταν στο τετράγωνο έπρεπε να βρουν μια στρατηγική ώστε να επιτύχουν την αποκρυπτογράφηση των συμβόλων. Στη διαδικασία, τρεις εκπαιδευτικοί που είχαν ως μητρική γλώσσα τα Αραβικά μετέγραψαν αμέσως το τετράγωνο και βρήκαν ότι δεν ήταν μαγικό! Στο αίτημα επιμορφωτή να σκεφτούν μια διαφορετική στρατηγική, οι εκπαιδευτικοί εγκατέλειψαν την αλγεβρική προσέγγιση και στράφηκαν στη λογική των μονάδων και δεκάδων και στη συχνότητα εμφάνισής τους.

Όταν αποκρυπτογραφήθηκε το τετράγωνο, οι επιμορφωτές έδωσαν πληροφορίες για τα σύμβολα που χρησιμοποιούνταν και τα οποία ήταν πρόγονοι των τωρινών Αραβικών αριθμών. Η γραφή κάποιων αριθμών είχε αλλάξει, γεγονός που οδήγησε ορισμένους εκπαιδευτικούς στο να κάνουν λάθος. Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους επιμορφούμενους να προτείνουν πιθανά πλαίσια χρήσης του μαγικού τετράγωνου στο πλαίσιο της διδασκαλίας τους στην τάξη.

Συνοψίζοντας, η πρώτη αυτή φάση της πιλοτικής εφαρμογής είχε διττή στοχοθεσία: αφενός να προτείνει στους εκπαιδευτικούς διαδικασίες αναζήτησης και ανταλλαγής πρακτικών για την εν δυνάμει αναπαραγωγή και χρήση τους στη σχολική τάξη, και αφετέρου, να προκαλέσει την επίγνωση των εκπαιδευτικών για τις δυσκολίες που συνδέονται με την υιοθέτηση διερευνητικής οπτικής ως προς το συγκεκριμένο «κείμενο», δηλαδή το μαγικό τετράγωνο, ώστε να μπορέσουν να διαμορφώσουν οι ίδιοι μια αντίστοιχη πρακτική στη σχολική τάξη.

### Εκ των προτέρων ανάλυση

#### 1. Σχετικές μαθηματικές έννοιες και πρόγραμμα σπουδών

Οι μαθητές της τάξης που επιλέχθηκε για πιλοτική εφαρμογή της παρούσας ενότητας υλοποιούσαν δραστηριότητες βασισμένες στην αρίθμηση και τις συνδέσεις της πρόσθεσης. Κατά την εκπαίδευσή τους στο Δημοτικό, είχαν ασκηθεί στη δεκαδική γραφή, πρώτα με ολόκληρους αριθμούς και μετά με δεκαδικά κλάσματα, αλλά παρέμειναν διάφορες δυσκολίες και στην 6<sup>η</sup> τάξη. Στο πρόγραμμα σπουδών της 6<sup>ης</sup> τάξης δηλώνεται με σαφήνεια ότι οι μαθητές αναμένεται “να γνωρίζουν και να

χρησιμοποιούν την αξία των αριθμών σύμφωνα με τη θέση τους στη γραφή ενός ολόκληρου ή δεκαδικού αριθμού”.

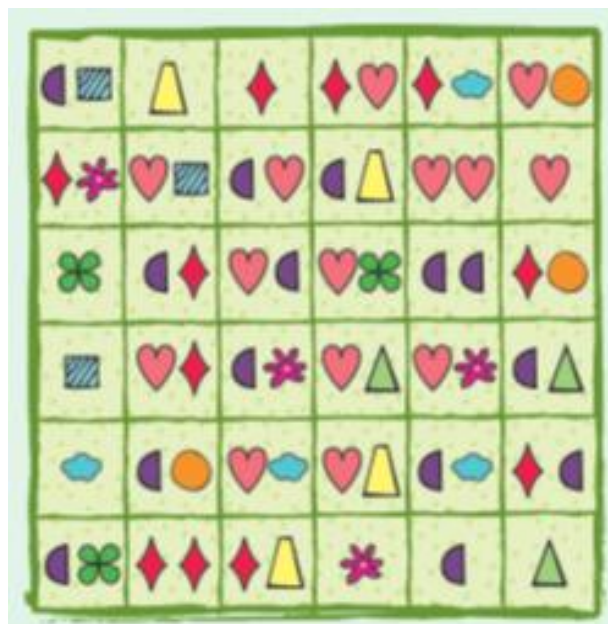
Στο πλαίσιο αυτό η ένταξη της μαθηματικής εργασίας που προτείνει η ενότητα αυτή στην 6<sup>η</sup> τάξη εμφανίζεται ως κατάλληλη επιλογή.

Η ενότητα επίσης υποστηρίζει την εμπειρική αίσθηση της αναζήτησης, την ικανότητα να γίνονται μια σειρά από λογικά βήματα που πιθανά είναι διαφορετικής φύσης και την χρήση τάξεων μεγέθους.

## 2. Πιθανές δυσκολίες και προτεινόμενες προσαρμογές

Οι εκπαιδευτικοί που μελέτησαν το αρχικό μαγικό τετράγωνο είχαν επισημάνει ορισμένες πιθανές δυσκολίες των μαθητών τους στην εφαρμογή της ενότητας:

- Τη δυσκολία των μαθητών να ονοματίσουν τα σύμβολα που εμφανίζονται στο τετράγωνο, γεγονός που καθιστά την παραμικρή προσπάθειά τους για λεκτική έκφραση του συλλογισμού τους δύσκολη. Οι εκπαιδευτικοί πρότειναν να αντικατασταθούν για τους μαθητές οι αρχαίοι Αραβικοί αριθμοί με μαθηματικά σχέδια ή καθημερινά αντικείμενα, ώστε να μπορούν να τα αναγνωρίσουν με όρους των μαθηματικών ή της καθημερινής ζωής, χρησιμοποιώντας δηλαδή αντίστοιχα μαθηματικό ή κοινό λεξιλόγιο.



Προσαρμοσμένο τετράγωνο (πηγή: Hélice, 6<sup>th</sup>, Didier; βλέπε Παράρτημα 1)

- Η δυσκολία στο να είναι σίγουρος ο εκπαιδευτικός ότι οι μαθητές όντως καταλαβαίνουν τι είναι ένα μαγικό τετράγωνο οδήγησε στο να προταθεί ως πρώτο βήμα εργασίας για τους μαθητές η ανακάλυψη μαγικών τετραγώνων με μικρότερα μεγέθη (3x3 ή 4x4).
- Επισημάνθηκε η αναγκαιότητα να υπάρχει καλή κατανόηση κάποιων όρων τους οποίους θα χρειαστεί οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν, όπως είναι οι όροι: σχέδιο, αριθμοί, γραμμές, στήλες, διαγώνιοι, πρόσθεση και άθροισμα. Η δραστηριότητα

για την ανακάλυψη του μαγικού τετραγώνου που θα προηγηθεί δίνει τη δυνατότητα να εισαχθούν ή να επανενεργοποιηθούν αυτές οι λέξεις-όροι.

- Η αναζήτηση της μαγικής σταθεράς του τετραγώνου  $6 \times 6$  συνεπάγεται την πρόσθεση διαδοχικών αριθμών από το 1 έως το 36. Θεωρήθηκε προτιμότερο η σταθερά αυτή να δοθεί στους μαθητές ώστε να μην αυξηθεί η δυσκολία στην αρχή της δραστηριότητας.

### **3. Περιγραφή της εκπαιδευτικής ακολουθίας στην τάξη**

#### **α. Προβλεπόμενες διαδικασίες**

Η παιδαγωγική ακολουθία που προτείνεται διαμορφώθηκε σε συνεργασία με τον εκπαιδευτικό που την εφάρμοσε και προβλέπει μια οργάνωση τριών συνεδριών που αναπτύσσονται στο πλαίσιο τεσσάρων διδακτικών ωρών.

##### Συνεδρία 1: Ανακάλυψη του μαγικού τετραγώνου (1 ώρα)

Ο εκπαιδευτικός στο πλαίσιο ενός συνεργατικού λογισμικού (Framapad<sup>1</sup>) αναθέτει μια «αποστολή» στους μαθητές του: πρέπει να ανακαλύψουν έναν θρύλο, τον θρύλο της χελώνας του ποταμού Λο.

Κάθε μαθητής έχει ένα laptop με σύνδεση στο διαδίκτυο και αρχίζει την έρευνα για τον θρύλο.

Οι μαθητές πρέπει να ανακαλύψουν τι κρύβεται πίσω από τον αριθμό 15, ένα βασικό στοιχείο στο θρύλο, το οποίο δεν είναι άλλο από την σταθερά  $3 \times 3$  του μαγικού τετραγώνου. Στη συνέχεια πρέπει να ελέγξουν εάν το δεδομένο τετράγωνο είναι μαγικό και να γεμίσουν τρία τετράγωνα για να τα κάνουν μαγικά. Τέλος, πρέπει να γράψουν μια περίληψη για το τι έμαθαν μέσω του συνεργατικού ψηφιακού εργαλείου που χρησιμοποίησαν. Η συνεδρία βιντεοσκοπείται.

##### Συνεδρία 2: Ομαδική εργασία στο προσαρμοσμένο τετράγωνο (2 ώρες)

Πρόκειται για μια συνεδρία δυο συνεχόμενων ωρών. Το προσαρμοσμένο τετράγωνο μοιράζεται στους μαθητές μαζί με ερωτήσεις που τους δίνουν τη δυνατότητα να το αποκρυπτογραφήσουν. Οι μαθητές δουλεύουν σε ομάδες των τριών ή τεσσάρων ατόμων για να προωθηθεί η διατύπωση και ανταλλαγή λογικών συλλογισμών. Η συνεδρία βιντεοσκοπήθηκε και οι διάλογοι μεταξύ των μαθητών ηχογραφήθηκαν.

##### Συνεδρία 3: Ομαδική περίληψη (1 ώρα)

Η συνεδρία αυτή αφιερώνεται στην ανασκόπηση της μέχρι τώρα εργασίας που επιτελέστηκε, στη μελέτη του αρχικού τετραγώνου, στην ανταλλαγή απόψεων και στις πολιτισμικές και ιστορικές συνεισφορές στη μαθηματική επιστήμη.

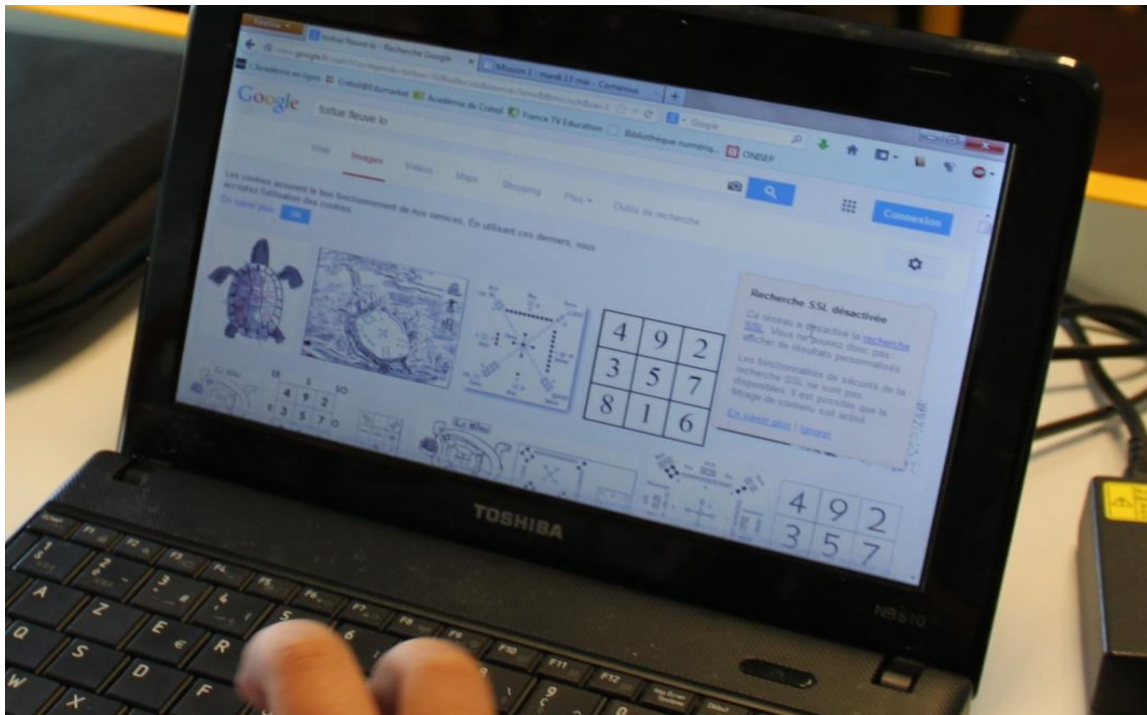
#### **β. Διαδικασίες υλοποίησης και ανάλυση**

Συνεδρία 1: Η διάσταση της “αποστολής” έδωσε κίνητρο για εμπλοκή των μαθητών στη διδασκαλία/μάθηση στη διάρκεια της πρώτης συνεδρίας. Παρατηρήθηκε

---

<sup>1</sup> <http://framapad.org/>

σημαντική διαφοροποίηση ανάμεσα στους μαθητές σχετικά με την ικανότητα για αναζήτηση πληροφοριών στο διαδίκτυο, όπως για παράδειγμα στη χρήση ή όχι λέξεων-κλειδιών στη μηχανή αναζήτησης. Επίσης, αναφορικά με τις ιστοσελίδες που χρησιμοποίησαν, στο εάν επιλογή των πληροφοριών τις οποίες συγκέντρωσαν βασίστηκε σε γραπτό κείμενο ή σε εικόνες, εάν οι πληροφορίες ξαναγράφτηκαν, αντιγράφηκαν ή επικολλήθηκαν για να χρησιμοποιηθούν ως απάντηση στα ερωτήματα του φύλλου εργασίας που δόθηκε από τον εκπαιδευτικό στους μαθητές σε ψηφιακή μορφή.



Οι δεξιότητες που σχετίζονται με την αναζήτηση και την επιλογή πληροφοριών στο διαδίκτυο και η ομαδική εργασία που υποστηρίζουν συνεργατικά ψηφιακά εργαλεία είναι μέρος των δεξιοτήτων που πρέπει να αποκτηθούν στο Γυμνάσιο.

Οι πιο γρήγοροι μαθητές άρχισαν την ομαδική συγγραφή της περίληψης στο τέλος αυτής της συνεδρίας ενώ οι άλλοι την τελείωσαν στο σπίτι τη μεθεπόμενη μέρα. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι πιο γρήγοροι μαθητές βάσισαν την περίληψή τους μόνο στο μαγικό τετράγωνο, ενώ οι μαθητές που συνάντησαν περισσότερες δυσκολίες παρέμειναν στον θρύλο και αφιέρωσαν την περίληψή τους στην περιγραφή της χελώνας.

Conclusion Mission 1 Maths

Administration Options Import / Export Versions Historique dynamique

B I U - [Liste à puces] [Alignement] [Couleur] [100%]

1 Bienvenue dans ce pad

2

3 La première chose à faire est d'entrer votre nom ou votre pseudo dans le champ en haut à droite, afin que les futurs collaborateurs puissent facilement vous identifier. Vous pouvez également modifier votre couleur en cliquant sur le carré à gauche du nom.

4

5 Tu rédigeras ici ce que tu auras appris à la fin de la mission 1 :

6

7 J'ai appris que le carré magique est un carré où dans chaque ligne la somme est égale dans chaque ligne.

8

9 J'ai appris que le carré magique est un carré où il y a des chiffres en lignes, et quand on additionne chaque ligne, on obtient le même résultat.

10

11 j'ai appris que dans un carré magique chaque si on les additionne ça fait la même somme

12

13 j'ai d'où venait les carrés magiques et que dans le carré magique 3x3 on doit trouver 8 sommes dans les carrés dont les valeurs sont égales

14 Aujourd'hui nous avons appris comment résoudre un carré magique il fallait additionner les chaque ligne et ça nous donner le résultat .

15

16 On a vu la légende de la tortue du fleuve de Lo et que sur son dos il y avait des points comme sur le dos de la tortue on peut y voir des points comme un sudoku il faut juste additionner les colonnes pour trouver le même nombre partout .

17 puis il fallait deviner pour le carré de l'activité est-il magique puis après avoir compris tout cela il fallait en compléter d'autre un peu plus difficile.

< enter your name >

Inviter d'autres utilisateurs.

Share this pad

l'éla: salut 17:08

Sophie: Salut vous aller bien 17:20

Clara: coucou 17:25

Clara: ^^ 17:25

Clara: aujourd'hui on a vu une nouvelle 17:27

légende qui parle d'une tortue qui a des petits signes sur son dos .

keeven: salut les gens 17:38

unnamed: Bravo les 6B, vos écrits sont déjà 20:13 bien

Μερικοί μαθητές ξαναδιάβασαν και διόρθωσαν τα λάθη σε προτάσεις που είχαν ήδη γραφτεί από συμμαθητές τους (αλλαγή χρώματος στη σειρά). Στο μάθημα των μαθηματικών, σύμφωνα με τον επίσημο παιδαγωγικό οδηγό, συμπεριλαμβάνονται δραστηριότητες γραπτού λόγου που αφορούν την αναγνωστική κατανόηση και την ικανότητα συγγραφής μαθηματικών κειμένων, όπως είναι για παράδειγμα η επανεξέταση και η βελτίωση της αρχικής εκδοχής των κειμένων από τους ίδιους τους μαθητές.

Bienvenue dans ce pad

La première chose à faire est d'entrer votre nom ou votre pseudo dans le champ en haut à droite, afin que les futurs collaborateurs puissent facilement vous identifier. Vous pouvez également modifier votre couleur en cliquant sur le carré à gauche du nom.

Tu rédigeras ici ce que tu auras appris à la fin de la mission 1 :

J'ai appris que le carré magique est un carré où dans chaque ligne la somme est égale dans chaque ligne.

J'ai appris que le carré magique est un carré où il y a des chiffres en lignes, et quand on additionne chaque ligne, on obtient le même résultat.

J'ai appris d'où venait les carrés magiques et que dans le

On a vu la légende de la tortue du fleuve de Lo et que sur son dos il y avait des points comme sur le dos de la tortue on peut y voir des points comme un sudoku il faut juste additionner les colonnes pour trouver le même nombre partout .

puis il fallait deviner pour le carré de l'activité est-il magique puis après avoir compris tout cela il fallait en compléter d'autre un peu plus difficile.

Nous avons étudié la légende de la tortue de Lo en mathématique sur la carapace il y avait des signes. Chaque signe représente un nombre et ça formait un carré magique que l'on devait résoudre. Pour le résoudre il fallait additionner les lignes verticales et les lignes horizontales

Οι μαθητές διαμορφώνουν, με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού, την τελική μορφή της περίληψης σχετικά με το τι έμαθαν στο πλαίσιο του συνεργατικού ψηφιακού εργαλείου που χρησιμοποίησαν. Οι μαθητές που είχαν πρόσφατα εγκατασταθεί στη Γαλλία έπρεπε να γράψουν μόνο μια πρόταση σε ένα κομμάτι χαρτί και να περιγράψουν τι είχαν δει στην οθόνη (τη χελώνα, τα σημεία ...).

## Συνεδρία 2

Η συνεδρία 2 αρχίζει με ανασκόπηση της ομαδικής περίληψης που γράφτηκε ψηφιακά από μερικούς μαθητές ανάμεσα στις δυο συνεδρίες, ώστε να απλοποιηθεί και να ολοκληρωθεί.

Μετά αρχίζει η αναζήτηση για το προσαρμοσμένο τετράγωνο (Παράρτημα 1, ερωτήσεις 2, 3, 4).

Μια σημαντική δυσκολία εμφανίζεται στην αρχή της δραστηριότητας: οι μαθητές καταλαβαίνουν καλά ότι κάθε σύμβολο κρύβει έναν αριθμό, αλλά για κάποιους μαθητές τα δέκα σύμβολα αντιπροσωπεύουν τα 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.

Επίσης το να ερμηνεύσουν ότι ένα τετράγωνο περιέχει ακολουθίες φυσικών από το 1 παρουσιάζει επίσης πρόβλημα, καθώς, για τους περισσότερους μαθητές, οι αριθμοί αρχίζουν από το 10 ή και το 11. Είναι μια δυσκολία που δεν ήταν αναμενόμενη: γι' αυτούς τους μαθητές, τα 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 δεν είναι αριθμοί, αλλά ψηφία.

Μια άλλη δυσκολία συνίσταται στο να διαφοροποιήσουν τη συχνότητα με την οποία εμφανίζεται ένα σύμβολο από τον τελικό αριθμό που αναπαρίσταται. Η ανακάλυψη των δυο πρώτων αριθμών παίρνει πολύ χρόνο, η αναζήτηση γίνεται πιο εύκολη μετά, αλλά τέσσερα σύμβολα δεν έχουν ακόμη αποκρυπτογραφηθεί στο τέλος της συνεδρίας.

## Συνεδρία 3

Η αναζήτηση των αριθμών σύντομα τελειώνει. Μερικοί μαθητές συνειδητοποιούν ότι μια διαγώνιος δε χρησιμοποιήθηκε στο λογικό συλλογισμό και ζητάνε να ελέγξουν όλους τους αριθμούς που έχουν γραφτεί σε αυτή τη διαγώνιο. Τότε δίνεται στους μαθητές η αρχική εκδοχή του τετραγώνου και η πληροφόρηση ότι ανακαλύφθηκε στην Κίνα.

Ένας μαθητής βρίσκει αναλογίες με το ήδη αποκρυπτογραφημένο τετράγωνο. Ένας άλλος μαθητής που έχει έρθει πρόσφατα στη Γαλλία διαβάζει και γράφει κάποιους Αραβικούς αριθμούς που αναγνωρίζει. Το γεγονός προκαλεί ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην τάξη. Οι μαθητές δείχνουν πολύ φαντασία προσπαθώντας να αιτιολογήσουν γιατί το τετράγωνο βρέθηκε στην Κίνα. Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός δίνει πληροφορίες για την ιστορία των Αραβικών αριθμών.

### **Μια εκ των υστέρων ανάλυση**

Αρχικά επισημαίνεται ότι η παιδαγωγική ακολουθία που υιοθετήθηκε κέντρισε το ενδιαφέρον των μαθητών. Δουλεύτηκαν δεξιότητες κατανόησης κειμένου, αναζήτησης και επιλογής πληροφοριών. Η χρήση του συνεργατικού εργαλείου έδωσε τη δυνατότητα τους μαθητές να συμμετάσχουν στη συγγραφή κειμένου με ποικίλους τρόπους: γράφοντας, ξαναγράφοντας, αναθεωρώντας, διορθώνοντας ...

Επίσης, να σημειωθεί ότι στην αρχή της συνεδρίας οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν αυθόρμητα ορισμένους μαθηματικούς όρους, όπως είναι οι όροι “γραμμές” και

“στήλες”, και ότι συχνά αντικαθίστανται από “οριζόντιες γραμμές” και “κάθετες γραμμές”. Στο τέλος της συνεδρίας οι όροι αυτοί χρησιμοποιούνται σωστά.

Το ζήτημα όμως που έκανε τη μεγάλη διαφορά ανάμεσα στους “ΕΑΝΑ”<sup>2</sup> μαθητές και στους υπόλοιπους μαθητές είναι ο προσδιορισμός των συμβόλων.

Οι μαθητές “ΕΑΝΑ”<sup>2</sup> για την επικοινωνία μέσα στην τάξη βασίζονται στη σχολική γλώσσα, χρησιμοποιώντας το λεξιλόγιο που έχουν μάθει στο σχολείο από τότε που ήρθαν (1 με 5 μήνες). Μπορούν να ονομάσουν τον κύκλο, το ημικύκλιο, τον ρόμβο, το τρίγωνο και το ορθογώνιο. Οι γαλλόφωνοι μαθητές έχοντας σαφώς μεγαλύτερη πρόσβαση στο λεξιλόγιο καθημερινών αναφορών (φεγγάρι, μήλο), εμφανίζουν δυσκολία στο να αναγνωρίσουν με μαθηματικούς όρους το κόκκινο σχήμα στην οθόνη και κανένας τους δεν πρότεινε τον όρο ρόμβο. Όλοι τους ανέφεραν το τετράγωνο αντί για το ορθογώνιο αποκαλύπτοντας ότι χρησιμοποιούσαν έναν γενικό όρο, δηλαδή που αναφέρονταν σε μια έννοια του καθημερινού λόγου αντί για τον επιστημονικό όρο που είχαν διδαχθεί στο μάθημα των μαθηματικών. Το ζήτημα αυτό δεν προκάλεσε όμως πρόβλημα στην επικοινωνία των μαθητών μεταξύ τους.

Οι σημαντικότερες δυσκολίες των μαθητών εμφανίστηκαν στην κατανόηση των ερωτήσεων που υπέβαλε ο εκπαιδευτικός και στην εξήγηση των επιχειρημάτων. Συχνά χρησιμοποιούνται περίπλοκες συντακτικές δομές και απαιτείται αναδιατύπωση.

Το κυριότερο όμως ζήτημα που αναδύθηκε είναι ότι η γλώσσα που χρησιμοποιείται στην μαθηματική επικοινωνία πρέπει να εκφράζει ακριβώς τις έννοιες στις οποίες παραπέμπει. Η σημασία των λέξεων “σχήμα” και “αριθμός” ποικίλει ανάλογα με τα συμφραζόμενα, στη μητρική γλώσσα ή στα μαθηματικά, και φάνηκε ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν κατείχε πλήρως τα νοηματικά αυτά πεδία. Παρόλα αυτά οι μαθητές αυτής της τάξης συνήθιζαν να επιτελούν χωρίς καμία δυσκολία μεμονωμένες σχολικές δραστηριότητες που επαναλαμβάνονταν και οι οποίες είναι κλασσικές για την αριθμηση, όπως το να αναγνωρίζουν τις δεκάδες ενός αριθμού. Στο πλαίσιο όμως της επίλυσης ενός προβλήματος η επικοινωνία και αλληλεπίδραση παραπέμπει σε ένα άλλο επίπεδο διαθεσιμότητας της μαθηματικής και της γλωσσικής γνώσης.

---

<sup>2</sup> Τρεις μαθητές των οποίων η μητρική γλώσσα είναι τα Πορτογαλικά: ένας μαθητής από το Μπαγκλαντές, ένας από το Πακιστάν και ένας από τη Σρι Λάνκα. [Οι μαθητές ΕΑΝΑ (Elèves Allophones Nouvellement Arrivés) έχουν έλθει πρόσφατα στη Γαλλία, δεν έχουν εμπειρία φοίτησης σε γαλλικό σχολείο ούτε επαρκείς δεξιότητες επικοινωνίας στα γαλλικά. Σύμφωνα με την οδηγία 2012-141 du 2 October 2012, φοιτούν σε τυπική σχολική τάξη, διδάσκονται τη γλώσσα μέσα από τα σχολικά γνωστικά αντικείμενα και ανάλογα με τη διαθεσιμότητα στη σχολική μονάδα παρακολουθούν για ένα μικρό διάστημα μαθήματα εκμάθησης της γλώσσας (Σημ. μεταφραστική)]

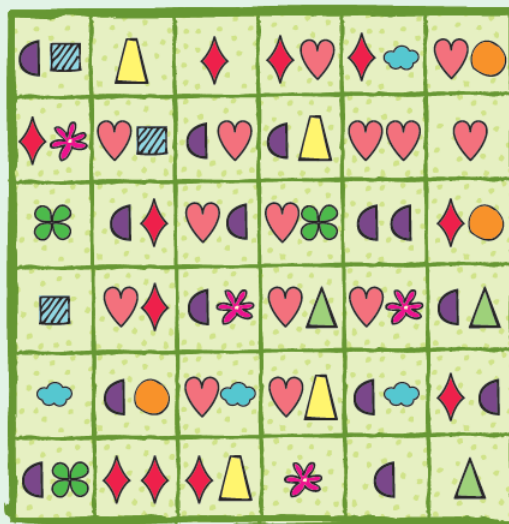
Τρεις μαθητές των οποίων η μητρική γλώσσα είναι τα Πορτογαλικά: ένας μαθητής από το Μπαγκλαντές, ένας από το Πακιστάν και ένας από τη Σρι Λάνκα.

## Βιβλιογραφία

- Chabanne J.-C., Bucheton D.(2002) *Écrire en ZEP : un autre regard sur les écrits des élèves*, Delagrave édition - CRDP Versailles <http://www.cndp.fr/bienlire/04-media/b-biblio03.asp?prodid=42772> (available address on 2015 May 01)
- Vygotski, L.S. (1934). *Pensée et Langage*, Editions sociales (Traduction de F.Sève, 1985).
- Marin B. (2011-2012), La reformulation en classe: un discours équivoque, *La construction des inégalités scolaires*, sous la direction de Rochex J.-Y., Crinon J., Presses Universitaires de Rennes.
- Ifrah G. (1994), *Histoire universelle des chiffres*, édition Robert Laffont.
- Saint-Andrews University, *The Arabic numeral system*, <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Indexes/Arabs.html> (available address on 2015 May 01)

## Παράρτημα 1 (πηγή : Hélice, 6<sup>η</sup>, Didier)

### @ Un grand carré magique



Ce carré est magique mais chaque chiffre est remplacé par un symbole. Cherchons à découvrir tous les nombres contenus dans les cases !

#### 1 Préparation du travail

- a/ Reproduire ce carré avec des cases vides.
- b/ Dessiner sous ce carré les symboles utilisés dans le carré magique ci-contre.

#### 2 La constante magique

La constante magique de ce carré est 111. Expliquer ce que cela signifie.

#### 3 Les chiffres des dizaines

- a/ Ce carré contient les premiers nombres entiers à partir de 1. Quels sont les nombres qu'il contient ? Quels sont les chiffres des dizaines possibles ?

b/ Compter le nombre d'apparitions de chaque symbole comme chiffre des dizaines et démasquer un premier chiffre.

c/ Écrire le chiffre démasqué dans le carré vide partout où il se trouve.

d/ Dans la 1<sup>re</sup> colonne, quel doit être le chiffre des dizaines inconnu pour pouvoir obtenir la constante magique ? En déduire le 3<sup>e</sup> chiffre des dizaines à démasquer. Compléter le carré.

#### 4 Les chiffres des unités

- a/ Quel symbole des chiffres des unités n'est jamais seul dans une case ? Quel chiffre cache-t-il ?
- b/ Observer la dernière colonne : quel chiffre permet-elle de découvrir ?
- c/ Quel chiffre la 3<sup>e</sup> ligne permet-elle de découvrir ?
- d/ Quel autre chiffre peut-on alors connaître ? (Penser aux diagonales.)
- e/ Finir de remplir le carré. Vérifier que le carré obtenu est bien magique !

#### 5 Un carré bien ancien

Observer un très vieux carré magique conservé au musée de Xian en Chine, sur le site :

[http://home.nordnet.fr/~ajuhel/Grenier/car\\_mag.html](http://home.nordnet.fr/~ajuhel/Grenier/car_mag.html). Traduire chacun des chiffres inscrits.

## Δεύτερη πιλοτική εφαρμογή

από τον M. Piccione\*\*

### Εισαγωγή

Η πρόταση διδασκαλίας που προτείνεται στην ενότητα αυτή αφορά αριθμητικές έννοιες. Ειδικότερα αφορά στην αρίθμηση (δεκαδικό σύστημα, θεσιακό αξιακό σύστημα), στις προσθετικές σχέσεις και, σε πιο γενικό επίπεδο, στις συμβολικές αναπαραστάσεις. Προσφέρει ένα πλαίσιο κατάλληλο για εμπλοκή των μαθητών με βασικές έννοιες του προγράμματος των μαθηματικών στο Γυμνάσιο, όπως τις βρίσκουμε στο αντίστοιχο «Ιταλικό Πλαίσιο Κατευθύνσεων» για αυτή τη βαθμίδα αυτή της εκπαίδευσης.

Αρχικά έγινε περιγραφή της πρότασης και αναλυτική συζήτηση με τους δυο εκπαιδευτικούς των τάξεων στις οποίες θα γινόταν η πιλοτική εφαρμογή.

### Η πρόταση

Το πλαίσιο της ενότητας αναφέρεται στην αποκρυπτογράφηση ενός παλιού μαγικού τετραγώνου που ανακαλύφθηκε στην Κίνα.

Η δραστηριότητα στοχεύει στο να επανεξεταστούν έννοιες που έχουν ήδη διδαχθεί στους μαθητές ώστε να βελτιωθεί η γνώση τους και να είναι σε θέση να εκφράσουν ρητά ορισμένες θεμελιώδεις ιδιότητές τους, όπως επίσης να αναπτυχθεί η αίσθηση των συμβόλων. Με άλλα λόγια, η ενότητα προωθεί μια μεταγνωστική ανάλυση σημαίνοντος-ερμηνείας στην Αριθμητική για να αποσαφηνίσει τη σχέση “φυσικού αριθμού-συμβολικής αναπαράστασης” και κατά συνέπεια τη σχέση “ψηφίο-θέση-αξία” και τελικά τη έννοια της “τάξης μεγέθους”. Με τον τρόπο αυτό αντιμετωπίζεται το γνωστικό εμπόδιο που σχετίζεται με το επιστημολογικό εμπόδιο της μετάβασης από την έννοια του αριθμού στην έννοια του ψηφίου.

Επιπλέον, η ενότητα παρέχει σημαντικές δυνατότητες για να εισαχθούν πρακτικές επίδειξης, η αλγεβρική σκέψη, και επίσης για αναστοχασμό σε γεωμετρικά ερωτήματα. Τέλος, διαμορφώνει ένα μαθησιακό πλαίσιο κατάλληλο για την ανάπτυξη γλωσσικών δεξιοτήτων κατανόησης και παραγωγής κειμένου, όπως επίσης ανάπτυξης δεξιοτήτων διαλογικού λόγου, μέσα από την επεξήγηση σχεδίων-στρατηγικών-λύσεων.

Όσον αφορά τον *συναισθηματικό* τομέα, η προσέγγιση που υιοθετείται χρησιμοποιεί δυο μεθοδολογίες, το παιχνίδι και την αφήγηση, οι οποίες επιτρέπουν όχι μόνο για ενεργοποιηθεί η περιέργεια, η φαντασία, η δημιουργικότητα, η πρόθεση ανακάλυψης, ο ρόλος της διατύπωσης υποθέσεων, αλλά επίσης να αποτραπούν καταστάσεις άγχους, ανησυχίας ή αισθήματα ανεπάρκειας.

---

\* Πανεπιστήμιο Σιένα, Ιταλία

Μια ιστορική και πολυπολιτισμική οπτική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να σκιαγραφήσει τις εξελίξεις της αριθμητικής και προφορικής αρίθμησης από το παρελθόν μέχρι σήμερα σε διαφορετικές χώρες και κουλτούρες.

Ειδικότερα, η ενότητα αποκαλύπτει το χάσμα μεταξύ της ενστικτώδους ανθρώπινης δραστηριότητας του “μετρήματος” και της αργής διαδικασίας μέσω της οποίας τελειοποιήθηκε ένα σύστημα γραφής το οποίο χρησιμοποιεί μερικά σύμβολα για να αναπαραστήσει ακόμη και τους μεγάλους αριθμούς.

### **Η πιλοτική εφαρμογή**

Η πιλοτική εφαρμογή της διδακτικής ενότητας έγινε σε δυο τάξεις του δεύτερου έτους (7<sup>η</sup> τάξη) του Γυμνασίου “G. Papini” (Castelnuovo Berardenga, Σιένα). Στη τάξη φοιτούσαν 42 μαθητές (11 μαθητές με μεταναστευτική καταγωγή και 10 μαθητές με μαθησιακά προβλήματα) και υπήρχαν δυο εκπαιδευτικοί (V. La Grotteria & P. Sabatini). Η εφαρμογή έγινε με τη συνεργασία ενός επιμορφωτή εκπαιδευτικών. Η ενότητα υλοποιήθηκε ακολουθώντας το γενικό σχεδιασμό που δόθηκε από τη Γαλλική ομάδα του προγράμματος, δομημένη σε τέσσερις συνεδρίες, με δυο επιπλέον επιχειρήματα, το πρώτο μια γεωμετρική παρέκβαση, και το δεύτερο ένα σχήμα αριθμητικής κατασκευής. Αυτά τα δυο βήματα δεν είχαν σχεδιαστεί, αλλά προέκυψαν μέσα από την εργασία στην τάξη. Αντιστοιχούσαν σε έναν *μεταγνωστικό-γλωσσικό στόχο* και έναν *γνωστικό στόχο* αντίστοιχα, δηλαδή, στο να:

- να κάνουν τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν τη δυσκολία να εξηγήσουν με τεχνικούς όρους ακόμη και μια φαινομενικά απλή διαδικασία (δηλαδή την κατασκευή ενός τετραγώνου που χωρίζεται σε συγκλίνοντα μέρη),
- να βοηθήσουν τους μαθητές στο να δομήσουν μια ξεκάθαρη *νοητική αναπαράσταση* του τρόπου με τον οποίο μπορούν να οργανωθούν οι φυσικοί αριθμοί σε δεκάδες, τονίζοντας την συχνότητα εμφάνισης ψηφίων στο ρόλο μονάδων ή δεκάδων από το 0 μέχρι το 99.

Δεν μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το Πρόγραμμα Framapad, που προέβλεπε ο αρχικός σχεδιασμός της ενότητας αυτής, λόγω προβλημάτων στο εργαστήριο υπολογιστών. Η διαφοροποίηση όμως αυτή σε σχέση με τις αρχικές οδηγίες που είχαν δοθεί από τη γαλλική ομάδα σχεδιασμού, δεν μείωσε την αξία της ενότητας από γνωστική άποψη. Αντίθετα, έδωσε δυνατότητα συμμετοχής σε όλους τους μαθητές της τάξης, επιτρέποντάς τους να συμβάλλουν με κάποιο τρόπο, έστω και στη δραστηριότητα της γραφής των αριθμών.

#### Συνεδρία 1: Προσεγγίζοντας τα μαγικά τετράγωνα (3 ώρες)

Η παρουσίαση της δραστηριότητας. Η εργασία άρχισε με μια σύντομη ιστορία που παρουσίασε ο εκπαιδευτικός (βλέπε Παράρτημα Α.1), και την παρουσίαση της εικόνας του παλιού τετραγώνου.



Η λέξη “τετράγωνο” εξετάστηκε ώστε να επαληθευθεί η ικανότητα να εξηγηθεί η σημασία ενός πολύ οικείου γεωμετρικού όρου.

Προέκυψαν μερικές δυσκολίες που δεν είχαν προβλεφθεί και σχετίζονταν με τις έννοιες της “πλευράς” και “δεξιάς γωνίας”. Οι δυσκολίες αυτές έρχονταν σε αντίθεση με ότι προέκυψε από τις συνθήκες της “ισότητας μεταξύ τμημάτων” και της “ισότητας μεταξύ γωνιών”, οι οποίες κατανοήθηκαν αμέσως επειδή “επικαλύπτονται”.

Συγκεκριμένα, η λέξη “πλευρά” η οποία αρχικά είχε αναφορά τη λέξη “όριο” κατά τον σχηματισμό προτάσεων που αναφέρονταν στον κατάλληλο ορισμό σταδιακά βελτιώθηκε, σύμφωνα με τα ακόλουθα βήματα:

- “το τμήμα του ορίου”
- “το τμήμα του ορίου ανάμεσα σε δυο κορυφές τριγώνου”
- “τμήμα που ενώνει δυο κορυφές”.

Η λέξη “δεξιά γωνία” προκάλεσε δυσκολίες στο σχηματισμό ολοκληρωμένων προτάσεων, όπως επίσης στην εξήγηση κατασκευής στην οποία οι μαθητές διπλώναν χαρτί, όπως φαίνεται στη συνέχεια:

- “ο χώρος που βρίσκεται ανάμεσα σε δυο τμήματα τα οποία είναι το ένα για το άλλο...”
- “διπλώνω πρώτα ένα τμήμα του χαρτιού και μετά διπλώνω το άλλο προς τα μέσα, προσέχοντας να μην το βάλω ούτε πριν ούτε μετά”
- “διπλώνω μια φορά ένα μέρος του χαρτιού και μετά διπλώνω τη δεύτερη πτυχή πάνω στην πρώτη”.

Σε μερικές περιπτώσεις σχετιζόταν με το “μετράω” και με την κλίση ανάμεσα σε οριζόντιο και κάθετο άξονα”.

Η αναζήτηση στο διαδίκτυο και αποτελέσματά της.

Τώρα χρειαζόταν να διερευνηθούν οι εκφράσεις “μαγικό τετράγωνο” και “τετράγωνο της σειράς 6”. Ξεκίνησε μια έρευνα στο διαδίκτυο για να απαντηθούν τα ερωτήματα αυτά.

Οι μαθητές, σε ομάδες των 2-3 ατόμων σε κάθε υπολογιστή του εργαστηρίου, άρχισαν να ψάχνουν στο διαδίκτυο.

Στη συνέχεια, κάθε ομάδα έγραψε ένα κείμενο συνοψίζοντας τις πληροφορίες που είχε συλλέξει και θεώρησε σχετικές. Ο μαθητές αναφέρθηκαν επίσης στην ιστορία των μαγικών τετραγώνων (βίντεο).

Κάθε ομάδα διαβάζει το κείμενό της στην τάξη. Κατά την ανάγνωση επισημαίνονται ορισμένοι όροι που έχουν χρησιμοποιηθεί στα κείμενα των μαθητών, όπως “διάταξη”, “σειρά”, “μαγικό άθροισμα”. Επιπλέον αναδύθηκαν κάποιες ιδιότητες, όπως η ύπαρξη και η μοναδικότητα των μαγικών τετραγώνων που βασίζεται στην διάταξη. Οι μαθητές εντυπωσιάζονται για το πλήθος των μαγικών τετραγώνων που μπορεί να υπάρξουν, το παράξενο άλμα της πληθικότητας από την τρίτη στην τέταρτη τάξη (από 1 μέχρι 880), και από την τέταρτη στην πέμπτη (από 880 μέχρι 275.305.224) φτάνοντας στο επίπεδο δισεκατομμύρια δισεκατομμυρίων στο επόμενο βήμα.

Δουλεύοντας ομαδικά, οι πληροφορίες που συγκεντρώθηκαν από τις διάφορες ομάδες αποτυπώθηκαν περιληπτικά σε ένα μόνο κείμενο που διαμορφώθηκε από ένα μαθητή με σκοπό να συμπεριληφθούν σε μια τελική έκθεση ως αφίσα. (Figure 1)

Εξάσκηση σε μια απλή περίπτωση. Αυτή η δραστηριότητα είχε σκοπό να εμπεδώσουν οι μαθητές τις ιδιότητες που καθορίζουν το μαγικό τετράγωνο. Σε κάθε ομάδα δόθηκε ένα φύλλο χαρτί που περιείχε μια έγχρωμη εικόνα του μαγικού τετραγώνου 3x3 και μερικές ερωτήσεις για το είδος των αριθμών που εμφανίζονται σε αυτό και για τις επιπρόσθετες ιδιότητες των αριθμών που ικανοποιούνται σε κάθε σειρά, στήλη και διαγώνιο (βλέπε Παράρτημα Α.2). Στην επιμέρους αυτή δραστηριότητα, η πλειονότητα των μαθητών αντιμετωπίζει τους όρους “σειρά” και “στήλη” με την έννοια που έχουν οι λέξεις αυτές στη φυσική γλώσσα, και τη λέξη “διαγώνιος” με τη γεωμετρική ερμηνεία του, δηλαδή ως μαθηματικό όρο. Οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν τη λέξη “σταθερά”, την οποία παραφράζουν όπως φαίνεται παρακάτω:

- “πάντα δίνει το ίδιο αποτέλεσμα”.

Μερικοί μαθητές μπόρεσαν να επιδείξουν τα αντικείμενα με χειρονομίες. (Figure 2)

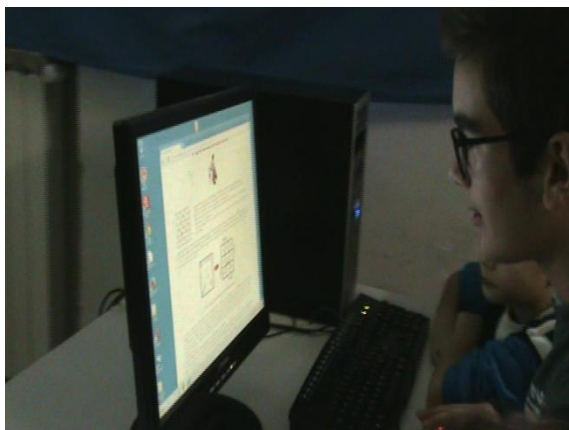


Figure 1



Figure 2

Συνεδρία 2: Συζητώντας τις λέξεις “διάταξη ενός τετραγώνου” και “μαγικό άθροισμα” (2 ώρες)

Οι καινούριες έννοιες “σειρά τετραγώνου” και “μαγικό άθροισμα” κέντρισαν την προσοχή των μαθητών.

Στην ολομέλεια της τάξης με την καθοδήγηση των ερωτήσεων του εκπαιδευτικού, πραγματοποιήθηκαν οι ακόλουθες δραστηριότητες για να δομηθεί η έννοια της σειράς του τετραγώνου:

- σχεδιασμός στον πίνακα του τετραγώνου που αντιστοιχούσε σε κάθε σειρά (από 1 μέχρι 6)
- εξήγηση των λειτουργιών που θα εκτελούνταν
- συσχετισμός της σειράς του τετραγώνου με τον αριθμό των κελιών του
- επισήμανση της κοινοτυπίας του μαγικού τετραγώνου της σειράς 1 και της ανυπαρξίας (αδυναμίας ύπαρξης) μοντέλων για τη σειρά 2.

Στις προσπάθειες των μαθητών για λεκτικές εξηγήσεις η μετάβαση από την ενστικτώδη στην συγκεκριμένη ιδέα αποδείχθηκε ότι δεν ήταν εύκολη διαδικασία. Για την υποστήριξη της νοητικής κατασκευής, προτάθηκε στους μαθητές μια σχεδιαστική δραστηριότητα η οποία αποδείχθηκε χρήσιμη: στο πλαίσιο της οι μαθητές μπόρεσαν να πουν ότι σειρά είναι “οι αριθμοί των κελιών κατά μήκος μιας πλευράς” ή “ο αριθμός των κελιών κάθε σειράς”, “ο αριθμός υποδιαιρέσεων μιας πλευράς”. Επίσης προέκυψαν δυσκολίες στο να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές και να περιγράψουν τα βήματα της διδασκαλίας για την ακολουθία, η οποία κατέδειξε ένα χαμηλό επίπεδο ανάπτυξης διαδικαστικής σκέψης στους μαθητές.

Η έννοια του μαγικού αθροίσματος δε δημιούργησε προβλήματα· η συζήτηση πάνω σε αυτό επέτρεψε σε ένα μαθητή να επιχειρήσει την αποσαφήνιση του κανόνα υπολογισμού του μαγικού αθροίσματος, βασιζόμενος στη σειρά, γεγονός που προκάλεσε τον ενθουσιασμό των συμμαθητών του:

*“με τη σειρά μπορώ να βρω τον συνολικό αριθμό από τα κελιά· μετά πρέπει να προσθέσω όλους τους αριθμούς από 1 μέχρι αυτό τον αριθμό που βρήκα και τελικά πρέπει να διαιρέσω αυτόν τον καινούριο με τον αριθμό των σειρών”.*

Ανάκληση της τωρινής αρίθμησης. Συνεχίζοντας να δουλεύει σε επίπεδο ολομέλειας η τάξη ανακάλεσε τις ιδιότητες της τωρινής αρίθμησης, και ζητήθηκε από τους μαθητές να εξηγήσουν την έννοια του ψηφίου και την έννοια του ψηφίου εξαρτώμενου από τη θέση.

Χρήσιμη υποστήριξη στο εγχείρημα αυτό παρείχε ο σχεδιασμός ενός πίνακα στο μαυροπίνακα της τάξης, όπως στην εικόνα.

|   |    |    |     |  |  |  |  |
|---|----|----|-----|--|--|--|--|
| 0 | 10 | 20 | 30  |  |  |  |  |
| 1 | 11 | 21 | 31  |  |  |  |  |
| 2 | 12 | 22 | 32  |  |  |  |  |
| 3 | 13 | 23 | 33  |  |  |  |  |
| 4 | 14 | 24 | 34  |  |  |  |  |
| 5 | 15 | 25 | 35  |  |  |  |  |
| 6 | 16 | 26 | 36  |  |  |  |  |
| 7 | 17 | 27 | ... |  |  |  |  |
| 8 | 18 | 28 |     |  |  |  |  |
| 9 | 19 | 29 |     |  |  |  |  |

Μέσω του σχεδίου αυτού οι μαθητές μπόρεσαν να αναπαραστήσουν νοερά την κανονική κατανομή των ψηφίων των μονάδων και των δεκάδων ως γραπτή διαδοχή και να συζητήσουν για τις περιπτώσεις που παρατηρούσαν.

Συνεδρία 3. Αποκρυπτογραφώντας το μαγικό τετράγωνο (1 ώρα)

Λύνοντας ένα όμορφο μαγικό τετράγωνο. Σε μικρές ομάδες, οι μαθητές επικεντρώθηκαν στη λύση του μαγικού τετραγώνου της σειράς 6, όπου τα σύμβολα του αρχικού παλιού τετραγώνου είχαν αντικατασταθεί από άλλα γνώριμα σχήματα.

Αρχικά επιχείρησαν να δοκιμάσουν την αλληλουχία της υποτιθέμενης αριθμητικής αξίας κάποιων ψηφίων· μετά συνέχισαν με πιο συστηματικό τρόπο, ακολουθώντας υποδείξεις του εκπαιδευτικού και χρησιμοποιώντας το “σχέδιο οδηγιών” που είχε επεκταθεί μέχρι τον αριθμό 36. Μπόρεσαν να υλοποιήσουν τη στρατηγική του μετρήματος της επανάληψης και των ψηφίων και των αριθμών και να συγκρίνουν τα αποτελέσματα για να βγάλουν συμπεράσματα (πρώτα ανακαλύπτοντας το σύμβολο του αριθμού 3, μετά αυτό του 0 ...). (figure 4a and 4b).



Figure 4a



Figure 4b

Αποκρυπτογραφώντας το μαγικό τετράγωνο του Xian. Κατά τη διάρκεια αυτής της συνεδρίας, ο εκπαιδευτικός έδωσε σε κάθε ομάδα ένα αντίτυπο του αρχαίου Κινεζικού μαγικού τετραγώνου και τους ανέθεσε να αποκρυπτογραφήσουν τους αραβικούς αριθμούς που ήταν διαθέσιμοι. Η αντιστοιχία ανάμεσα στα σύμβολα των δυο τετραγώνων ήταν προφανής. (figure 5).

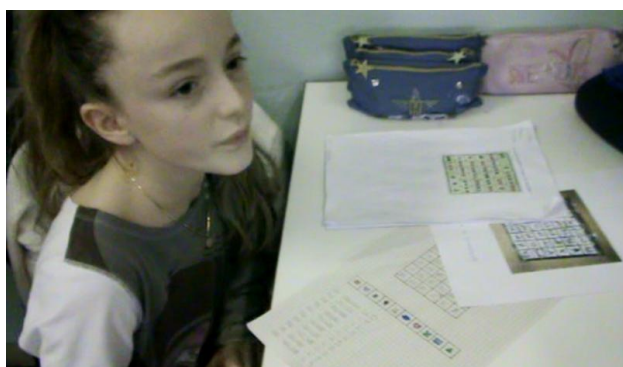


Figure 5

|                                  |         |          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |  |
|----------------------------------|---------|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| I numeri nei popoli dell'Egeo    |         |          | Pur essendo passati alla storia per il grande sviluppo delle conoscenze in tutti i campi del sapere, i Greci non trovarono un sistema di numeri più efficiente rispetto ai popoli che li avevano preceduti. Per scrivere i numeri, essi usarono le loro 24 lettere, a cui aggiunsero altri tre simboli. Per distinguere i simboli numerici da quelli letterali, mettevano in alto a destra una specie di apostrofo; l'apostrofo messo in basso a sinistra moltiplicava per 1000 il valore del numero. |  |  |
| Greci                            |         |          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |  |
| (1000 a.C.)                      |         |          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |  |
| SISTEMA ADDITIVO                 |         |          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |  |
| α' = 1                           | ι' = 10 | ρ' = 100 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |  |
| β' = 2                           | κ' = 20 | σ' = 200 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |  |
| γ' = 3                           | λ' = 30 | τ' = 300 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |  |
| δ' = 4                           | μ' = 40 | υ' = 400 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |  |
| ε' = 5                           | ν' = 50 | φ' = 500 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |  |
| ζ' = 6                           | ξ' = 60 | χ' = 600 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |  |
| η' = 7                           | ο' = 70 | ψ' = 700 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |  |
| θ' = 8                           | π' = 80 | ω' = 800 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |  |
| ς' = 9                           | ι' = 90 | ϑ' = 900 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |  |
| α = 1000; β = 4000; ρ = 100.000. |         |          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |  |
| ρ'χ'γ' = 123                     |         |          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |  |

Figure 6

#### Συνεδρία 4: Επιστροφή στην πολιτισμική οπτική (1 ώρα)

Η ιστορική οπτική για την εξέλιξη των Αραβικών αριθμών δόθηκε μέσα από την συλλογική ανάγνωση και σύνοψη, που υλοποιήθηκαν ως συλλογικές εργασίες, εννέα πινάκων που είχαν προετοιμάσει οι εκπαιδευτικοί. Το υλικό αυτό αναφερόταν σε συστήματα αρίθμησης στον Σουμερικό, Βαβυλωνιακό, Αιγυπτιακό, Ινδο-Αραβικό, Ελληνικό, Κινέζικο και Ρωμαϊκό πολιτισμό. Δυο επιπρόσθετοι πίνακες αφορούσαν τους “Αριθμούς του υπολογιστή” και την “Ιστορία του μηδέν”.

Κάθε ομάδα μαθητών προσπάθησε να γράψει έναν αριθμό στο σύστημα που της δόθηκε.

#### Τελική αξιολόγηση (1 ώρα)

Περίπου πέντε μήνες μετά το τέλος της δραστηριότητας, δόθηκε στους μαθητές ένα ερωτηματολόγιο (βλέπε Παράρτημα Α.3) ώστε να αξιολογηθεί η δουλειά που είχε γίνει. Οι απαντήσεις των μαθητών παρέπεμψαν σε ποικίλες παιδαγωγικές υποδείξεις. Οι πιο σημαντικές αφορούσαν στην πυκνότητα και στο βάθος των περιεχομένων της

ενότητας αυτής ως πρόταση διδασκαλίας, η υλοποίηση των οποίων απαιτεί χρόνο ώστε να αναδυθεί στο έπακρο το μαθησιακό της δυναμικό.

### **Εκ των υστέρων ανάλυση.**

Η ενότητα ως πρόταση διδασκαλίας αποδείχθηκε παραγωγική σε επίπεδο ενδιαφέροντος, τόσο μεθοδολογικά όσο και θεματικά. Παρείχε ιστορική προσέγγιση, συνεργατική μάθηση, διαμεσολαβητικά εργαλεία, ρόλους, διαδικασίες ανακάλυψης και αποκρυπτογράφησης.

Στο *συναισθηματικό τομέα*, η βιωματική, σε αντίθεση με την αμιγώς νοητική προσέγγιση, μπορεί να μετουσιωθεί σε παιχνίδι και να συνδεθεί με συναισθήματα ενός καλώς εννοούμενου ανταγωνισμού ανάμεσα στις ομάδες των μαθητών. Το καινούριο πρόβλημα της αποκωδικοποίησης αποτελεσμάτων, καθώς βασίζεται σε λογικές διεργασίες και συλλογισμούς, συνδέεται με στιγμές έκπληξης και ικανοποίησης.

Στο *γνωστικό τομέα*, η δραστηριότητα προσφέρει ένα περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές μπορούν να εφαρμόσουν Αριθμητικές έννοιες και πράξεις, να επανέλθουν σε αυτές και να ενισχύσουν την επίγνωσή τους αναφορικά με τις μαθηματικές ιδιότητες και κανονικότητες, παίρνοντας γλωσσικούς τύπους (το άθροισμα των πρώτων φυσικών αριθμών, την αξία του “μαγικού κλειδιού”) και βελτιώνοντας την κατανόησή τους ως προς τον μαθηματικό συμβολισμό.

Η εργασία απαιτεί και αναπτύσσει ικανότητες, όπως:

- της απόκτησης πληροφοριών από ένα κείμενο με στόχο τη συγγραφή κειμένου
- της κατανόησης οδηγιών
- της επεξήγησης, του ορισμού και της επιχειρηματολογίας.

Η δραστηριότητα ανάδειξε τις δυσκολίες οι οποίες, σε αρκετές περιπτώσεις, παρέπεμπαν στη μηχανική διδασκαλία/μάθηση της Αριθμητικής. Η γλώσσα που χρησιμοποιούνταν στη διδασκαλία καθοδήγησε τους μαθητές στο να αναπαράγουν γλωσσικά στερεότυπα με τα οποία «έντυναν» ένα αδύναμο σώμα εννοιολογικής κατανόησης.

Εμφανίστηκε επίσης μια απρόβλεπτη δυσκολία κατά τη διαδικασία σχεδίασης ενός τετραγώνου που χωρίζεται σε ένα δεδομένο αριθμό ίσων κελιών: πολλοί μαθητές δεν μπορούσαν να το κάνουν με συστηματικό τρόπο: δεν μπορούσαν να εξηγήσουν τα βήματα της γεωμετρικής κατασκευής ενός υπάρχοντος σχεδίου απλά ανακαλώντας την νοητική του αναπαράσταση. Αυτή η δραστηριότητα είναι κατάλληλη για την εκπαίδευση εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των μαθηματικών (εισαγωγική ή ενδο-υπηρεσιακή).

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

.....

### A.1

**Η ιστορία που ειπώθηκε:** Μια αρχαιολόγος φίλη μας πήγε να δουλέψει στην Κίνα και επισκέφτηκε το Μουσείο του Χιαν, όπου ενθουσιάστηκε με ένα αρχαιολογικό εύρημα: μια μεταλλική πλάκα με την εικόνα ενός τετράγωνου σχεδίου που είχε παράξενα σύμβολα. Η εξήγηση από κάτω έλεγε την ακόλουθη φράση “Μαγικό τετράγωνο σειράς 6”. Όταν γύρισε στην Ιταλία μας ρώτησε για τη μαθηματική σημασία της πλάκας. Επειδή διασκεδάσαμε όταν λύναμε το αίνιγμα, σας προτείνουμε το ίδιο παιχνίδι ανακάλυψης...

### A.2



Osservate questo quadrato con numeri nelle caselle.

Qui sotto abbiamo trascritto alcuni comandi e domande alle quali vi chiediamo di provare a rispondere:

- Quali numeri compaiono nelle caselle del quadrato?
- Addizionate i numeri di ogni riga del quadrato. Che cosa potete notare?
- Addizionate i numeri di ogni colonna del quadrato. Che cosa potete notare?
- E addizionando i numeri di ciascuna diagonale del quadrato. Che cosa trovate?

Adesso scrivete tutto quello che avete scoperto!

### A.3

1. A scuola è arrivato un bambino nuovo...
2. Prova a spiegargli che cos'è un quadrato magico.
3. Digli che cosa ti ha colpito dell'attività svolta per riuscire a decifrare il quadrato magico con le figurine.
4. Il bambino non sa disegnare un quadrato diviso in caselle quadrate uguali. Raccontagli come si fa.
5. Inoltre è curioso di sapere come si scrive un numero nel nostro sistema di numerazione. Prova a spiegarglielo.

## Τρίτη πιλοτική εφαρμογή

από την Η. Moraona\*\*\*

Δύο διαφορετικές τάξεις, 7<sup>η</sup> και 5<sup>η</sup>, σε διδασκαλία που ακολουθεί τη μεθοδολογική προσέγγιση της ταυτόχρονης διδασκαλίας γνωστικού περιεχομένου και γλώσσας (Content and Language Integrated Learning - CLIL), δηλαδή σε μάθημα στο οποίο υλοποιούνται ταυτόχρονα μαθηματικοί και γλωσσικοί στόχοι.

Ηχογράφηση σε βίντεο

**1<sup>η</sup> πιλοτική εφαρμογή: 7<sup>η</sup> τάξη, μάθημα CLIL, χρήση διαδραστικού πίνακα - δυνατότητα να γράψουν πάνω σε μια ήδη υπάρχουσα εικόνα (το καβούκι μιας χελώνας), υπάρχουσα εμπειρία διδασκαλίας/μάθησης μαθηματικών σε στο πλαίσιο γλωσσικού μαθήματος (μάθημα Αγγλικών), η διαφορετική γλώσσα (ξένη) δεν αποτελεί ιδιαίτερο εμπόδιο.**

Γλωσσικοί στόχοι: δραστηριότητα α) παραγωγής προφορικού λόγου -συζήτηση για μαγεία και θαύματα, β) κατανόησης προφορικού λόγου – ο θρύλος του Lo Shu

Μαθηματικοί στόχοι: αναζήτηση δομών και κανονικοτήτων, ανακάλυψη (επανακάλυψη) ιδιοτήτων των αριθμητικών πράξεων, μοτίβα σε τετραγωνικό πλέγμα

Υπήρξαν προβλήματα – το μοτίβο πάνω στη χελώνα στην παρουσίαση είχε ένα λάθος, δηλαδή οι αριθμοί που προέκυψαν δεν έφτιαχναν ένα μαγικό τετράγωνο

Όταν ζητήθηκε να πολλαπλασιάσουν τον κάθε αριθμό με τον ίδιο αριθμό, κάποιοι μαθητές πολλαπλασίασαν 1x1, 2x2, 3x3 κλπ,

Προθέρμανση: συζήτηση – τι είναι οι θρύλοι, ποια είναι η διαφορά μεταξύ ενός θρύλου και ενός παραμυθιού, δώστε παραδείγματα από θρύλους, σας αρέσουν οι θρύλοι και η μαγεία;

Εισαγωγή: Διήγηση του θρύλου του Lo-Shu

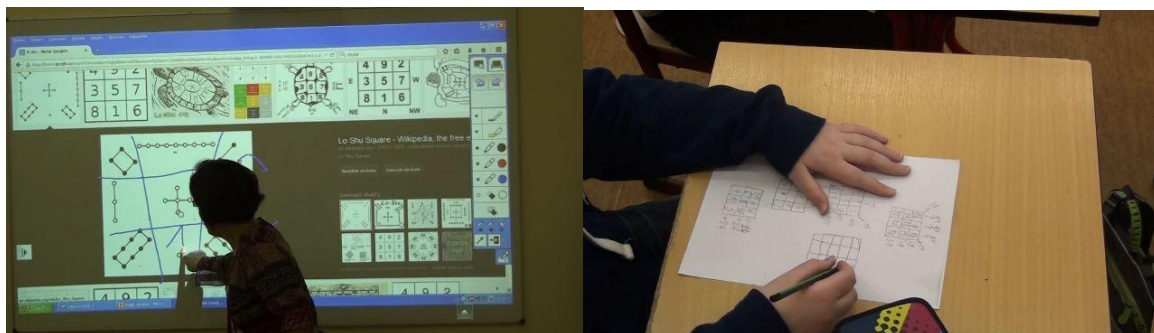
Διαστάσεις της Βασικής δραστηριότητας:

1. ανακάλυψη των αριθμών σε ένα μαγικό τετράγωνο και τι καθιστά ένα τετράγωνο με αριθμούς μαγικό ( δεν πέτυχε λόγω λάθος εικόνων)
2. ανακάλυψη του τι συμβαίνει αν ο ίδιος αριθμός προστεθεί σε κάθε αριθμό, θα είναι ακόμη μαγικό; Γιατί;
3. ανακάλυψη του τι συμβαίνει αν ο κάθε αριθμός πολλαπλασιαστεί με τον ίδιο αριθμό (υπήρξε παρανόηση του ζητούμενου από 2 μαθητές)
4. ανακάλυψη του τι συμβαίνει αν ανταλλάξουμε σειρές ή στήλες που έχουν την ίδια απόσταση από το κέντρο
5. επίδειξη της αρχής της τοποθέτησης αριθμών σε ένα μαγικό τετράγωνο

\* \*\* Πανεπιστήμιο Charles στην Πράγα, Τσεχία

6. οι μαθητές δουλεύουν σε ένα τετράγωνο 5 φορές το 5, προσπαθώντας να βάλουν τους αριθμούς, μερικοί τελειώνουν εγκαίρως και με επιτυχία, ο εκπαιδευτικός επιβλέπει και προσπαθεί να βοηθήσει όπου προκύπτουν προβλήματα.

Τέλος του μαθήματος. Ο εκπαιδευτικός αποφασίζει να διδάξει εκ νέου τη διδακτική αυτή πρόταση, επιχειρώντας τη φορά αυτή να εξαλείψει τα προβλήματα που προέκυψαν στο πλαίσιο του παρόντος μαθήματος.



**2<sup>η</sup> πιλοτική εφαρμογή: 5<sup>η</sup> τάξη, μάθημα CLIL, χρήση διαδραστικού πίνακα – χρησιμοποίηση της δυνατότητας να γράψουν πάνω στην εικόνα ενός καβουκιού χελώνας, το πρώτο μάθημα μαθηματικών στα Αγγλικά.**

Γλωσσικοί στόχοι: δραστηριότητα προφορικού λόγου – συζήτηση για μαγεία και θαύματα, δραστηριότητα ακουστικής κατανόησης- ο θρύλος του Lo Shu, εισαγωγή βασικού μαθηματικού λεξιλογίου στα Αγγλικά (μονός αριθμός, ζυγός αριθμός, πολλαπλασιάζω, προσθέτω, αφαιρώ, διαγώνιος, σειρά, στήλη)

Μαθηματικοί στόχοι: αναζήτηση δομών και κανονικοτήτων, ανακάλυψη των ιδιοτήτων των αριθμητικών πράξεων

Το αρχικό σχέδιο μαθήματος τροποποιήθηκε ώστε να αποφευχθούν κάποια από τα προβλήματα των προηγούμενων μαθημάτων: η επιλεγμένη εικόνα είχε το σωστό μοτίβο έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν πραγματικά να ανακαλύψουν τους αναπαριστανόμενους αριθμούς

Προθέρμανση: Τι είναι μαγεία; Δραστηριότητα προφορικού λόγου, εκμείευση ιδεών από τα παιδιά.

Εισαγωγή: Ο εκπαιδευτικός διηγείται την ιστορία του Lo-Shu ελέγχοντας την κατανόηση των μαθητών (η ιστορία περιλαμβάνει περισσότερες δύσκολες λέξεις όπως πλημμύρες, χελώνα, θυσία)

Βασική δραστηριότητα:

1. Η φωτογραφία του μοτίβου πάνω στο καβούκι προβλήθηκε στο διαδραστικό πίνακα, κατασκευάστηκε ένα πλέγμα και ζητήθηκε από τους μαθητές να σκεφτούν γιατί είναι μαγικό.

Οι μαθητές έψαξαν πολύ ενεργητικά για δεκάδες διαφορετικών κανονικοτήτων (μοτίβα μονών, ζυγών αριθμών, το άθροισμα των αριθμών σε ένα τρίγωνο, το άθροισμα των αριθμών στις γωνίες κλπ.), και μετά από περίπου 7 λεπτά

ενασχόλησης με το πρόβλημα, οι 15 μαθητές ανακάλυψαν την ιδέα (μέσα από την παρατήρηση ότι οι αντίθετοι αριθμοί έχουν άθροισμα 10).

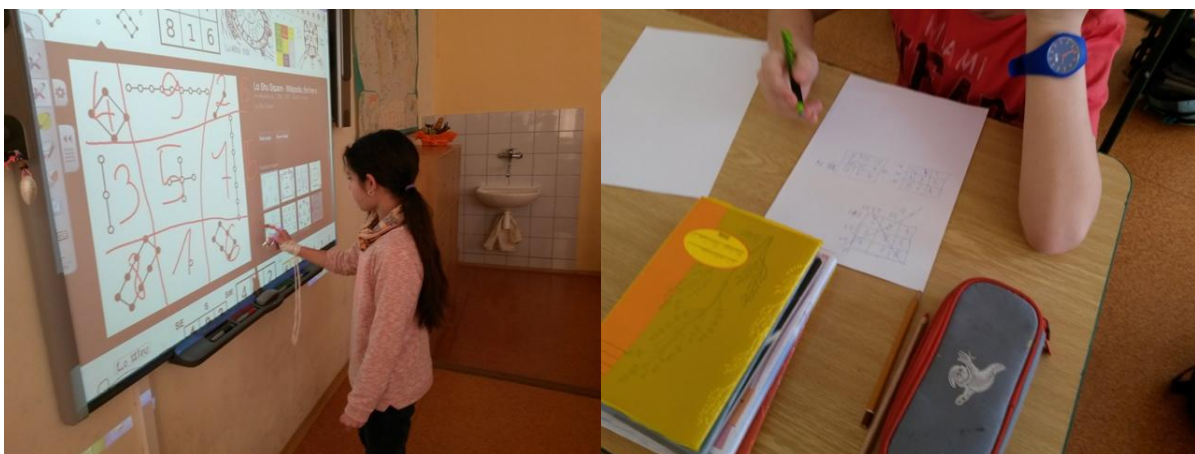
2. Ζητήθηκε από τους μαθητές να προσθέσουν τον ίδιο αριθμό σε κάθε νούμερο, και αναδείχθηκε ένας αριθμός με τον οποίο θα δούλευαν όλοι (το 6). οι μαθητές δουλεύουν και ανακαλύπτουν ότι το τετράγωνο είναι ακόμη μαγικό, ο εκπαιδευτικός ρωτάει: γιατί;

Μετά από κάποιες προτάσεις, οι μαθητές βλέπουν ότι η διαφορά μεταξύ του αρχικού αθροίσματος 15 και του καινούριου αθροίσματος 33 είναι 18. Μαζί με τον εκπαιδευτικό συνειδητοποιούν ότι το 18 είναι τρεις φορές το έξι, πχ. ο καινούριος αριθμός προστιθέμενος τρεις φορές σε κάθε σειρά, στήλη και διαγώνιο.

3. Ζητείται από τους μαθητές να πολλαπλασιάσουν κάθε αριθμό με τον ίδιο αριθμό (λαμβάνοντας υπόψη την εμπειρία από την 7<sup>η</sup> τάξη, αναδεικνύεται ο αριθμός 3 και τα πρώτα τρία νούμερα εκτελούνται μαζί για να μην υπάρχει παρανόηση). οι μαθητές δουλεύουν και ανακαλύπτουν ότι το τετράγωνο είναι ακόμη μαγικό και ότι το άθροισμα είναι 45. πάλι τους ζητείται να ψάξουν την αιτία, δηλαδή γιατί συμβαίνει αυτό.

Οι μαθητές πειραματίζονται, προτείνουν διαφορετικές ιδέες αλλά χρειάζονται αρκετή υποστήριξη από τον εκπαιδευτικό για να δουν ότι 15 φορές το 3 κάνει 45, δηλαδή ότι πολλαπλασιάζοντας κάθε υποάθροισμα ή ολόκληρο το άθροισμα με τον ίδιο αριθμό δίνει το ίδιο αποτέλεσμα

Το μάθημα τελείωσε. Καθώς αφιερώθηκε περισσότερος χρόνος για την ανακάλυψη της μαγείας, οι δραστηριότητες που είχαν σχεδιαστεί για τη διδακτική αυτή ενότητα περιορίστηκαν. Παρόλα αυτά ο εκπαιδευτικός αξιολόγησε αυτό το μάθημα ως καλύτερο και πιο χρήσιμο για τους μαθητές καθώς έδωσε τη δυνατότητα να ανακαλύψουν πολλά πράγματα μόνοι τους.



## **Συμπεράσματα από τις τρεις πιλοτικές εφαρμογές**

από τους Marie-Hélène Le Yaouanq και Brigitte Marin

Τα πειράματα που έγιναν τείνουν να επιβεβαιώσουν το ενδιαφέρον για τη δραστηριότητα “μαγικό τετράγωνο” και την προσαρμοστικότητά της σε διαφορετικά επίπεδα τάξεων (από CM2 μέχρι 5<sup>è</sup>, δηλαδή από την Πέμπτη Δημοτικού μέχρι και την 7η τάξη, δηλαδή την πρώτη τάξη του Γυμνασίου).

Στο πλαίσιο της διδακτικής αυτής ενότητας, οι μαθητές μπαίνουν ενεργά σε θέση ερευνητή. Η παρουσίαση του θρύλου, η “μαγική” όψη του θέματος, επιτρέπει την ενεργό εμπλοκή στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθητών που είναι δεκτικοί στην παιγνιώδη οπτική και σε παρουσίαση δραστηριοτήτων οι οποίες τους δίνουν την αίσθηση της πρόκλησης. Η ενεργός εμπλοκή των μαθητών παρέμεινε σταθερή ακόμη και μετά από την ακολουθία των τριών ή τεσσάρων συνεδριών.

Στη Γαλλία και στην Ιταλία, αρχίζοντας τη δραστηριότητα με μια αναζήτηση στο διαδίκτυο και συνεχίζοντας με ανταλλαγή απόψεων και συγγραφή περίληψης, ενισχύεται η ανάπτυξη δεξιοτήτων που σχετίζονται με την αναζήτηση, ταξινόμηση και αξιοποίηση της πληροφορίας, όπως επίσης δεξιοτήτων γλωσσικής επάρκειας, γραπτού και προφορικού λόγου. Στην Τσεχία, το εγχείρημα της διερεύνησης/ανακάλυψης που επιχειρείται γίνεται με όχημα την Αγγλική (ξένη γλώσσα για τους μαθητές), και οι διαδικασίες είναι μάλλον πιο κοντινές στην πιλοτική εφαρμογή που έγινε στην Γαλλία, σε τάξη στην οποία φοιτούσαν και αλλόγλωσσοι μαθητές.

Παρ' όλα αυτά, παρατηρούνται και διαφορές στις διδακτικές εφαρμογές που υλοποιήθηκαν.

Εμφανίζονται διαφορές αναφορικά με τη διάρκεια του μαθήματος (1 μέχρι και 4 συνεδρίες) ανάλογα με τους στόχους που είχαν τεθεί για τα Μαθηματικά. Η μαθηματική εργασία περιλαμβάνει την ανακάλυψη του μαγικού τετραγώνου αλλά στη συνέχεια, στην περίπτωση της αποκωδικοποίησης του αρχαίου μαγικού τετραγώνου, επικεντρώνεται στην αρίθμηση ή στην ανακάλυψη συγκεκριμένων μαθηματικών του ιδιοτήτων.

Υπήρξε επίσης διαφορετική διαχείριση της πολυπολιτισμικής και ιστορικής διάστασης: στην Ιταλία, με ομαδική εργασία, δόθηκε έμφαση στα διαφορετικά συστήματα αρίθμησης ενώ στην Γαλλία στη συζήτηση και την ανταλλαγή απόψεων που έγινε στην ολομέλεια της τάξης, και η οποία βασίστηκε στην παρουσία μέσα στην τάξη μαθητών από διαφορετικά πολιτισμικά/γλωσσικά περιβάλλοντα.

Η αποκρυπτογράφηση του αρχαίου μαγικού τετραγώνου δίνει έμφαση στην δυσκολία του συμβολισμού, καθώς επίσης στις δυσκολίες που συνεπάγεται η αυθεντική πραγμάτωση ενός λογικού συλλογισμού για την αρίθμηση και τη θέση των αριθμών όταν δηλαδή πραγματώνεται σε πλαίσια διδασκαλίας διαφορετικά από τις “κλασικές” ασκήσεις, οι οποίες μπορεί να οδηγήσουν σε στερεοτυπικές

απαντήσεις, δηλαδή σε απαντήσεις που δεν αντανακλούν μια ισχυρή κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Η ιστορική διάσταση και η μελέτη των διαφορετικών συστημάτων αρίθμησης αποτελεί συνεπώς μια ενδιαφέρουσα προέκταση από μαθηματική άποψη.

Η αποκρυπτογράφηση του μαγικού τετραγώνου επιβεβαιώνει ότι οι γλωσσικές και γνωστικές διαστάσεις συνδέονται στενά. Έτσι, μια δυσκολία στη μαθηματική λογική αναγκάζει του μαθητές να εκφραστούν με ακρίβεια στη διάρκεια της συνδιαλλαγής τους με τον εκπαιδευτικό ή/και τους συμμαθητές τους ώστε να μπορέσουν να προχωρήσουν. Σε άλλες περιπτώσεις, η δυσκολία στο να εκφράσουν αυτό που έχουν κατανοήσει πολύ καλά από μαθηματική άποψη επιτρέπει στους μαθητές να συνειδητοποιήσουν την ανάγκη να δουλέψουν στη γλώσσα. Η περίπτωση που εξετάστηκε φαίνεται ότι παρέχει το περιβάλλον που επιτρέπει την ανάπτυξη τόσο των γλωσσικών όσο και των μαθηματικών ικανοτήτων, ενώ παράλληλα δίνει κίνητρα στους μαθητές για συμμετοχή στο μάθημα και προσαρμόζεται σε διαφορετικά επίπεδα τάξεων και σε διαφορετικούς στόχους.