

INTRODUZIONE A UN ANTICO QUADRATO MAGICO

di Marie-Hélène Le Yaouanq* e Brigitte Marin*

INTRODUZIONE

L'obiettivo di questa unità didattica è far lavorare gli alunni contemporaneamente sulla numerazione decimale e sull'uso della lingua francese, nello scrivere e nel parlare in matematica sia in termini di glossario che nello spiegare il proprio ragionamento. L'obiettivo è anche quello di permettere scambi di opinioni sulla numerazione scritta e orale utilizzata ieri e oggi in vari Paesi e di mettere in evidenza il contributo di altre civiltà alla costruzione della matematica in Europa.

Questa unità è basata su questo antico quadrato magico scoperto nel 1956.



http://home.nordnet.fr/~ajuhel/Grenier/car_mag.html

* Université Paris-Est Créteil - ESPE, Créteil (Francia).

Sperimentazione principale

di Marie-Hélène Le Yaouanq e Brigitte Marin

Presentazione della sperimentazione con gli insegnanti

La prima fase della sperimentazione ha avuto luogo durante un'attività di formazione in servizio di insegnanti, che aveva come obiettivo l'uso in classe della storia della matematica. Agli insegnanti è stato dato il documento che rappresenta l'antico quadrato magico, così com'è. Dovevano scoprire i numeri, nella loro scrittura attuale, che erano nascosti dietro i simboli.

Dato che la maggior parte degli insegnanti non conoscevano i numeri in arabo che apparivano nel quadrato, dovevano cercare una strategia per decriptarli. Tre insegnanti, la cui madre lingua era l'arabo, hanno trascritto il quadrato direttamente e hanno trovato che non era magico! E' stato allora chiesto di utilizzare un approccio diverso. Così, piuttosto rapidamente, hanno smesso di provare con l'approccio algebrico ed hanno utilizzato il ragionamento sulle unità e decine e sul numero di volte in cui comparivano.

Una volta che il quadrato è stato decrittato, i formatori hanno fornito informazioni sui simboli utilizzati, che erano gli antenati degli attuali numeri arabi. La scrittura di alcune cifre erano cambiate, cosa che ha indotto all'errore alcuni insegnanti. Dopo i formatori hanno chiesto agli insegnanti di trovare un utilizzo in aula di questo documento.

Così la prima parte ha avuto un duplice obiettivo per i formatori: da un lato, mettere gli insegnanti in una situazione di studio che avrebbero dovuto riprodurre in classe con i propri alunni e, dall'altro, rendere consapevoli gli insegnanti delle difficoltà dello studio del documento dato per consentire loro di adattare la situazione.

Analisi a priori

1. Concetti matematici interessati e curricoli

Le attività degli alunni si appoggiano sulla numerazione e sulle connessioni additive. Durante l'insegnamento elementare, si lavora sulla scrittura decimale, prima sui numeri interi e poi sulle frazioni decimali, ma numerose difficoltà rimangono ancora nel 6° anno. Nel curriculum del 6° anno, ci si aspetta esplicitamente che gli alunni siano capaci di "conoscere e usare il valore delle cifre a seconda del loro posto nella scrittura di un numero intero o decimale".

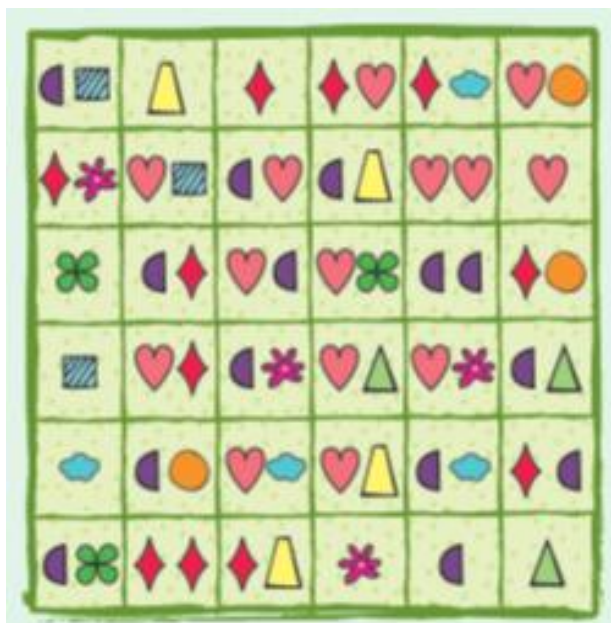
Pertanto l'inserimento del lavoro proposto in un 6° anno è normale.

Questo lavoro conta anche sul gusto del ricercare, sull'abilità di sostenere una serie di passaggi di ragionamento di natura potenzialmente diversa e di usare ordini di grandezze.

2. Difficoltà prevedibili e adattamenti suggeriti

Gli insegnanti che hanno studiato all'inizio il quadrato magico hanno evidenziato alcune difficoltà:

- La difficoltà di dare un nome ai simboli che appaiono nel quadrato, che rende difficile la delicatissima comunicazione del ragionamento. Allora gli insegnanti hanno suggerito che gli alunni dovrebbero sostituire gli antichi numerali arabi con disegni di figure matematiche o di oggetti della vita quotidiana. Così, per dare loro un nome, dovrebbero essere necessari termini della matematica e della vita quotidiana e l'alunno dovrà abituarsi ad usare il lessico della matematica od ordinario.



Quadrato adattato (origine: Hélice, 6th, Didier; vedere Allegato 1)

- La difficoltà di essere sicuri che gli alunni capiscano veramente cosa è un quadrato magico ha portato a introdurre una prima fase di lavoro per scoprire quadrati magici di dimensioni più piccole (3×3 or 4×4).
- Sarà necessario avere una comprensione profonda di alcuni termini di cui ci sarà bisogno, come figure, numeri, righe, colonne, diagonali, addizione e soma. Il lavoro fatto durante la scoperta del quadrato magico dovrebbe consentire di utilizzare o riutilizzare queste parole.
- La ricerca della costante magica del quadrato 6×6 comporta di addizionare numeri interi successivi da 1 a 36, e si è pensato più utile darla in modo da non aumentare le difficoltà all'inizio dell'attività.

3. Descrizione del percorso didattico

a. Svolgimento previsto

Il percorso didattico è stata adattato, in collaborazione con l'insegnante che la ha realizzata, prevedendo una organizzazione su tre sessioni, per quattro ore.

Sessione 1: Scoperta dei quadrati magici (1 ora)

L'insegnante propone ai suoi alunni, su un *collaboration tool* - software per svolgere attività in modo collaborativo (Framapad¹), una missione: devono trovare una leggenda, quella della tartaruga del fiume Lo.

Ogni alunno dispone di un portatile connesso a Internet e lanciano una ricerca su questa leggenda. Devono scoprire che cosa si nasconde dietro il numero 15, elemento cruciale nella leggenda e che non è altro che la costante di un quadrato magico 3 x 3. Dopo devono verificare che un dato quadrato è magico e completare tre quadrati in modo da renderli magici.

Per finire, devono scrivere sul portatile una sintesi di ciò che hanno appreso.

La sessione viene filmata.

Sessione 2: Lavoro di gruppo sul quadrato adattato (2h)

Il quadrato trasposto su un foglio viene distribuito agli alunni, accompagnato da domande che dovrebbero permettere loro di decriptarlo. Gli alunni lavorano in gruppi di 3 o 4 in modo da favorire il dialogo e la formulazione dei ragionamenti.

La sessione è filmata e i dialoghi fra gli alunni vengono registrati.

Sessione 3: Sintesi collettiva (1h)

Questa sessione sarà dedicata ad una revisione del lavoro fatto, allo studio di un quadrato iniziale così come a scambi e contributi culturali e storici.

¹ <http://framapad.org/>

b. Svolgimento reale ed analisi

Sessione 1: L'aspetto "missione" ha fortemente motivato gli alunni durante la prima sessione. Si sono potute osservare grandi differenze nello svolgimento della ricerca di informazioni su Internet, per esempio nell'utilizzo o meno delle parole chiave in un motore di ricerca, poi durante la scelta fra i siti proposti, la scelta di cercare dei testi o delle immagini da riscrivere o da copiare-incollare per rispondere alle domande nel documento dell'insegnante.



Le abilità di ricerca e scelta delle informazioni richieste, poi il lavorare insieme grazie a *collaboration tools* sono parte delle competenze su cui si deve lavorare nella scuola secondaria inferiore.

Gli alunni più veloci hanno iniziato la scrittura collettiva della sintesi alla fine della sessione, gli altri hanno finito a casa il giorno dopo. Si è potuto notare che gli alunni più veloci hanno basato la loro sintesi solo sul quadrato magico, mentre gli alunni che hanno incontrato maggiori difficoltà durante la sessione, si sono soffermati sulla leggenda e hanno dedicato la loro sintesi a una descrizione della tartaruga.

Conclusion Mission 1 Maths

Administration Options Import / Export Versions Historique dynamique

B I U S [Icons] 100%

1 Bienvenue dans ce pad

2

3 La première chose à faire est d'entrer votre nom ou votre pseudo dans le champ en haut à droite, afin que les futurs collaborateurs puissent facilement vous identifier. Vous pouvez également modifier votre couleur en cliquant sur le carré à gauche du nom.

4

5 Tu rédigeras ici ce que tu auras appris à la fin de la mission 1 :

6

7 J'ai appris que le carré magique est un carré où dans chaque ligne la somme est égale dans chaque ligne.

8

9 J'ai appris que le carré magique est un carré où il y a des chiffres en lignes, est quand on additionne chaque ligne, on obtient le même résultat.

10

11 j'ai appris que dans un carré magique chaque ligne si on les additionne ça fait la même somme

12

13 j'ai d'où venait les carrés magiques et que dans le carré magique 3x3 on doit trouver 8 sommes dans les carrés dont les valeurs sont égales

14 Aujourd'hui nous avons appris comment résoudre un carré magique il fallait additionner les chaque ligne et ça nous donner le résultat .

15

16 On a vu la légende de la tortue du fleuve de Lo et que sur son dos il y avait des points comme sur le dos de la tortue on peut y voir des points comme un sudoku il faut juste additionner les colonnes pour trouver le même nombre partout .

17 puis il fallait deviner pour le carré de l'activité est-il magique puis après avoir compris tout cela il fallait en compléter d'autre un peu plus difficile.

< enter your name >

Inviter d'autres utilisateurs.

Share this pad

léa: salut 17:08

Sophie: Salut vous aller bien 17:20

Clara: coucou 17:25

Clara: ^^ 17:25

Clara: aujourd'hui on a vu une nouvelle légende qui parle d'une tortue qui a des petits signes sur son dos . 17:27

keeven: salut les gens 17:38

unnamed: Bravo les 6B, vos écrits sont déjà 20:13 bien

Alcuni alunni hanno riletto e corretto errori nelle frasi che erano già state scritte da altri (cambiando colore sulla riga). Alcune attività di scrittura, di lettura e correzione, di revisione di scritti in redazione sono in gioco, in modo differenziato, per un breve tempo, e ben integrate nel lavoro di matematica.

Bienvenue dans ce pad

La première chose à faire est d'entrer votre nom ou votre pseudo dans le champ en haut à droite, afin que les futurs collaborateurs puissent facilement vous identifier. Vous pouvez également modifier votre couleur en cliquant sur le carré à gauche du nom.

Tu rédigeras ici ce que tu auras appris à la fin de la mission 1 :

J'ai appris que le carré magique est un carré où dans chaque ligne la somme est égale dans chaque ligne.

J'ai appris que le carré magique est un carré où il y a des chiffres en lignes, et quand on additionne chaque ligne, on obtient le même résultat.

J'ai appris d'où venaient les carrés magiques et que dans le

On a vu la légende de la tortue du fleuve de Lo et que sur son dos il y avait des points comme sur le dos de la tortue on peut y voir des points comme un sudoku il faut juste additionner les colonnes pour trouver le même nombre partout.

Puis il fallait deviner pour le carré de l'activité est-il magique puis après avoir cela il fallait en compléter d'autre un peu plus difficile.

Nous avons étudié la légende de la tortue de Lo en mathématiques sur sa carapace il y avait des signes. Chaque signe représente un nombre et sa forme. Un carré magique que l'on devait résoudre. Pour le résoudre il fallait additionner les lignes verticales et les lignes horizontales.

Gli alunni scrivono una sintesi finale di ciò che hanno appreso utilizzando il *collaboration tool*, con l'aiuto dell'insegnante.

Gli alunni nuovi arrivati in Francia hanno solo dovuto scrivere una frase su un pezzo di carta descrivendo ciò che avevano visto (la tartaruga, i punti...).

Sessione 2

La Sessione 2 inizierà con una rilettura della sintesi collettiva sul *collaboration tool* scritta da alcuni alunni nell'intervallo fra le due sessioni, per renderla più semplice e completarla.

Dopo può iniziare la ricerca sul quadrato adattato. (Allegato 1, domande 2, 3, 4)

Una importante difficoltà si presenta all'inizio dell'attività: gli alunni capiscono bene che ciascun simbolo nasconde una figura, ma per alcuni di loro i dieci simboli rappresentano per conseguenza 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.

Ma rappresenta un problema anche l'interpretare che questo quadrato contiene numeri interi consecutivi a partire da 1, perché, per la maggior parte degli alunni, i numeri iniziano da 10 o perfino da 11. Questa è una difficoltà non prevista: per questi alunni 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 non sono numeri ma cifre.

Un'altra difficoltà consiste nel differenziare il numero di occorrenze di un simbolo dalla cifra che esso rappresenta. La scoperta delle prime due cifre richiede molto tempo, la ricerca è più facile dopo ma, alla fine della sessione, rimangono ancora da decrittare quattro simboli.

Sessione 3

La ricerca è subito conclusa. Alcuni ragazzi si accorgono che una diagonale non è stata utilizzata nel ragionamento e chiedono di controllare la somma dei numeri scritti su questa diagonale. Allora viene dato agli alunni il quadrato iniziale insieme alla

spiegazione sulla sua scoperta in Cina. Un alunno fa la cosa analoga con il quadrato decriptato.

Un altro alunno, nuovo arrivato in Francia, legge e scrive alcuni numerali arabi che lui riconosce, cosa che genera un grande interesse nella classe. Gli alunni mostrano allora una grande immaginazione nel cercare di spiegare la ragione per cui il quadrato è stato trovato in Cina! L'insegnante dà informazioni sulla storia delle cifre arabe.

Analisi a posteriori

Innanzitutto si può notare che questa attività ha suscitato l'interesse degli alunni. Si è lavorato su lettura, ricerca e scelta di informazioni. L'uso di un *collaboration tool* ha consentito ad alcuni alunni di partecipare al lavoro scritto in modi diversi: scrivendo, riscrivendo, rivedendo, correggendo...

Si può anche notare che, all'inizio della sessione, alcuni termini matematici non sono utilizzati in modo spontaneo, come “righe” e “colonne”, spesso sostituite con “linee orizzontali” e “linee verticali”, ma queste vengono poi utilizzate in modo corretto alla fine della sessione.

Al contrario, la designazione dei simboli ha mostrato una vera differenza fra gli alunni “EANA”² e gli altri.

Gli alunni EANA³ si affidano alla lingua della scuola, utilizzando il glossario che hanno appreso fin dal loro arrivo (da 1 a 5 mesi). Parlano di cerchio, semi-cerchio, rombo, triangolo e rettangolo. Gli alunni di lingua francese fanno maggiore ricorso a cose della vita quotidiana (luna, cornetto alle mele). Così, loro hanno avuto difficoltà a dare un nome alla forma rossa e nessuno di loro ha suggerito il rombo. Alla fine tutti hanno parlato di quadrato invece che di rettangolo e, quindi, è sembrato che sia stato usato un termine generico riferito a un concetto quotidiano, invece del concetto scientifico studiato durante la lezione di matematica. Questo, di fatto, non ha causato alcun problema di comunicazione fra loro...

Le principali difficoltà si sono manifestate chiaramente nella comprensione delle domande e nella spiegazione delle argomentazioni. Costruzioni sintattiche complesse sono a volte utili e richiedono riformulazioni.

Ma, soprattutto, il linguaggio utilizzato deve esprimere esattamente le nozioni in gioco. Il significato dei termini “figura” e “numero” varia a seconda del contesto, in lingua madre o in matematica e si è visto che queste nozioni non erano completamente padroneggiate dalla larga maggioranza degli alunni. Questi pertanto svolgono senza alcuna difficoltà compiti scolastici isolati classici e ripetuti del lavoro sui numeri, come “dare la quantità delle decine di un numero”.

Il quadro di risoluzione di un problema in situazioni di comunicazione e interazione, mette in gioco un altro livello di disponibilità delle conoscenze matematiche e della padronanza della lingua.

² “Elèves allophones nouvellement arrivés” – «Alunni allofoni nuovi arrivati» in Francia

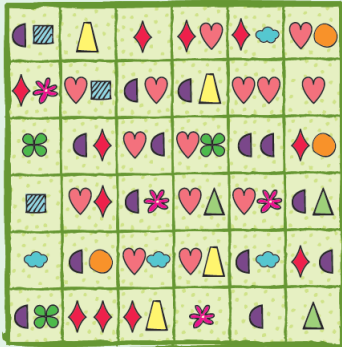
³ Tre alunni la cui lingua madre è il portoghese; uno del Bangladesh; uno del Pakistan e uno dello Sri-Lanka.

Bibliografia

- Chabanne J.-C., Bucheton D. (2002) *Écrire en ZEP : un autre regard sur les écrits des élèves*, Delagrave édition - CRDP Versailles <http://www.cndp.fr/bienlire/04-media/b-biblio03.asp?prodid=42772> (available address on 2015 May 01)
- Vygotski, L.S. (1934). *Pensée et Langage*, Editions sociales (Traduction de F.Sève, 1985).
- Marin B. (2011-2012), La reformulation en classe: un discours équivoque, *La construction des inégalités scolaires*, sous la direction de Rochex J.-Y., Crinon J., Presses Universitaires de Rennes.
- Ifrah G. (1994), *Histoire universelle des chiffres*, édition Robert Laffont.
- Saint-Andrews University, *The Arabic numeral system*, <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Indexes/Arabs.html> (01 Maggio 2015)

Allegato 1 (Hélice, 6th, Didier)

@ Un grand carré magique



Ce carré est magique mais chaque chiffre est remplacé par un symbole. Cherchons à découvrir tous les nombres contenus dans les cases !

1 Préparation du travail
a/ Reproduire ce carré avec des cases vides.
b/ Dessiner sous ce carré les symboles utilisés dans le carré magique ci-contre.

2 La constante magique
La constante magique de ce carré est 111. Expliquer ce que cela signifie.

3 Les chiffres des dizaines
a/ Ce carré contient les premiers nombres entiers à partir de 1.
Quels sont les nombres qu'il contient ? Quels sont les chiffres des dizaines possibles ?

b/ Compter le nombre d'apparitions de chaque symbole comme chiffre des dizaines et démasquer un premier chiffre.
c/ Écrire le chiffre démasqué dans le carré vide partout où il se trouve.
d/ Dans la 1^{re} colonne, quel doit être le chiffre des dizaines inconnu pour pouvoir obtenir la constante magique ? En déduire le 3^e chiffre des dizaines à démasquer. Compléter le carré.

4 Les chiffres des unités
a/ Quel symbole des chiffres des unités n'est jamais seul dans une case ? Quel chiffre cache-t-il ?
b/ Observer la dernière colonne : quel chiffre permet-elle de découvrir ?
c/ Quel chiffre la 3^e ligne permet-elle de découvrir ?
d/ Quel autre chiffre peut-on alors connaître ? (Penser aux diagonales.)
e/ Finir de remplir le carré. Vérifier que le carré obtenu est bien magique !

5 Un carré bien ancien
Observer un très vieux carré magique conservé au musée de Xian en Chine, sur le site : http://home.nordnet.fr/~ajuhel/Grenier/car_mag.html. Traduire chacun des chiffres inscrits.

Seconda sperimentazione

di Maria Piccione^{**}

Introduzione

La proposta offre un contesto adatto a trattare contenuti curriculari fondamentali della Scuola Secondaria di I grado, in accordo con gli indirizzi delle Indicazioni Nazionali. Essa riguarda direttamente concetti aritmetici: numerazione, relazioni additive e, più in generale, rappresentazione simbolica; dà anche, indirettamente, adito a riflettere su questioni geometriche. La proposta è stata dapprima descritta dal formatore e discussa con le due insegnanti delle classi dove è stata attuata.

Analisi a priori

Il lavoro è centrato sulla decrittazione di un antico quadrato magico scoperto in Cina.

L'attività intende far compiere agli allievi un percorso di rivisitazione concettuale del sistema decimale-posizionale di scrittura dei numeri, al fine di esplicitarne le proprietà fondamentali e di sviluppare il senso dei simboli. Più in dettaglio, essa mira a promuovere un'analisi metacognitiva dei concetti di *segno* e *significato* in ambito aritmetico, indirizzata ad una chiarificazione del rapporto numero naturale-rappresentazione simbolica, ovvero del rapporto cifra-posizione-valore e, infine, del concetto di ordine di grandezza. Essa affronta dunque un ostacolo cognitivo che corrisponde all'ostacolo epistemologico del passaggio dal concetto di numero a quello di numerale.

La proposta, inoltre, si presta a significativi sviluppi sia per l'avvio all'attività di dimostrazione che per l'avvio al pensiero algebrico.

Il contesto di apprendimento è adatto a promuovere lo sviluppo delle competenze linguistiche per la comprensione e la scrittura di un testo e per l'argomentazione (spiegazione di piani, strategie, soluzioni, ...).

Dal punto di vista delle dinamiche affettive, l'approccio si avvale di due metodologie, il gioco e la narrazione, adatte a stimolare nei ragazzi curiosità, creatività, scoperta, favorire assunzione di ruoli e anche a prevenire stati di ansia, di frustrazione o di inadeguatezza.

Una prospettiva storica e multiculturale può essere utilizzata per evidenziare gli sviluppi della numerazione scritta e orale dal passato ad oggi, in diversi paesi e culture. In particolare, essa può condurre a mostrare il divario tra l'istintiva attività umana del "contare" e il lento processo di elaborazione di un sistema di scrittura che si avvale di pochi segni per rappresentare tutti i numeri (anche quelli molto grandi!).

^{**} Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche - Università di Siena - Italia

La sperimentazione

L'unità didattica è stata sperimentata in due classi del secondo anno (7° grado) della Scuola Secondaria di I grado "G. Papini" (Castelnuovo B.ga, Siena), da due insegnanti (V. La Grotteria e P. Sabatini) con la collaborazione del formatore, ed ha coinvolto, rispettivamente, 21 alunni (dei quali 5 stranieri e 7 con difficoltà di apprendimento) e 21 alunni (dei quali 7 stranieri e 5 con difficoltà di apprendimento). L'attività è stata svolta seguendo la struttura del progetto presentato dal team francese, con due ulteriori sviluppi. Questi sono emersi durante il lavoro con i seguenti obiettivi metacognitivo-linguistici e cognitivi:

- riflettere sulla *difficoltà di spiegare* con ordine e in termini disciplinari anche una procedura apparentemente semplice, nella fattispecie, la costruzione di un quadrato suddiviso in celle congruenti;
- elaborare una *rappresentazione mentale* della distribuzione delle cifre del nostro sistema, nel ruolo di unità o decine.

Per problemi di gestione dell'aula computer, non è stato usato il programma Framapad; tuttavia, questa variazione non ha compromesso il lavoro dal punto di vista degli scopi prefissi, ed ha permesso la partecipazione di tutti.

Sessione 1: Approccio ai quadrati magici (3 ore)

Presentazione dell'attività. Il lavoro è cominciato con una breve storia raccontata dal formatore (vedi Allegato A.1) e la presentazione di un'immagine dell'antico quadrato di Xian:



L'attenzione è stata portata sulla parola "quadrato" per verificare la capacità dei ragazzi di spiegare il significato di un termine geometrico molto familiare. Alcune difficoltà impreviste sono emerse per i concetti di "lato" ed "angolo retto", diversamente da quelli di "uguaglianza tra segmenti" ed "uguaglianza tra angoli", subito descritti in termini di "sovrapposizione". Precisamente, la parola "lato" è stata inizialmente confusa con "perimetro", e gradualmente precisata, con espressioni quali: "*la parte del confine*"; "*la parte del confine tra due vertici*"; "*segmento che unisce due vertici*".

La parola "angolo retto" ha causato difficoltà sia nella pura spiegazione linguistica, sia nella descrizione di una procedura di costruzione concreta - mediante piegatura di

un foglio di carta - come mostrano le seguenti frasi: *"è lo spazio compreso tra due segmenti che sono [sospensione]"; "devo piegare una volta una parte del foglio e poi piegare l'altra parte verso l'interno, facendo attenzione a non metterlo prima o dopo"; "si deve piegare il foglio e poi piegare la seconda piega rispetto alla prima".* In alcuni casi, l'angolo retto è stato descritto coinvolgendo la misura, *"90 gradi"*, o l'incidenza *"tra un'orizzontale e una linea retta verticale"*.

Ricerca in internet e risultati.

In un secondo tempo, sono state analizzate le espressioni *"quadrato magico"* e *"quadrato magico di ordine 6"* con una ricerca in Internet.

Il lavoro è stato svolto in gruppi di 2-3 studenti al computer, in due fasi successive: di esplorazione e di scrittura di un testo con dati ritenuti rilevanti, anche sulla storia dei quadrati magici, risultata appassionante. Gli studenti di ogni gruppo hanno letto il testo ad alta voce. Durante la lettura, alcuni termini tecnici, come *"matrice"*, *"ordine"*, *"somma magica"*, sono emersi e sono stati evidenziati, insieme a proprietà, come esistenza/numerosità dei quadrati magici in funzione dell'ordine; queste hanno generato meraviglia per il sorprendente salto di cardinalità dal terzo al quarto ordine (1-880) e dal quarto al quinto (880-275.305.224) per raggiungere il livello dei miliardi di miliardi al passaggio successivo!

Lavorando in modo collaborativo, le informazioni raccolte dai vari gruppi sono state riunite in un unico testo (da inserire in un poster finale) dettato ad una allieva, seduta alla cattedra. (Foto 1)

Studio di un caso elementare. Ad ogni gruppo è stata consegnata una scheda contenente l'immagine a colori di un quadrato magico 3x3 e alcune domande-guida per l'analisi dell'oggetto (vedi Allegato A.2). Questa attività ha permesso agli studenti di consolidare la comprensione delle proprietà caratterizzanti l'oggetto di studio; la relativa descrizione verbale ha mostrato una generale facilità d'uso dei termini *"riga"*, *"colonna"* e *"diagonale"* - sostenuto dal senso comune e dall'interpretazione geometrica - diversamente da quello di *"costante"*, sostituito da parafrasi, quali: *"viene sempre lo stesso risultato"*. Alcuni ragazzi hanno solo indicato gli oggetti in questione aiutandosi con movimenti della mano. (Foto 2)

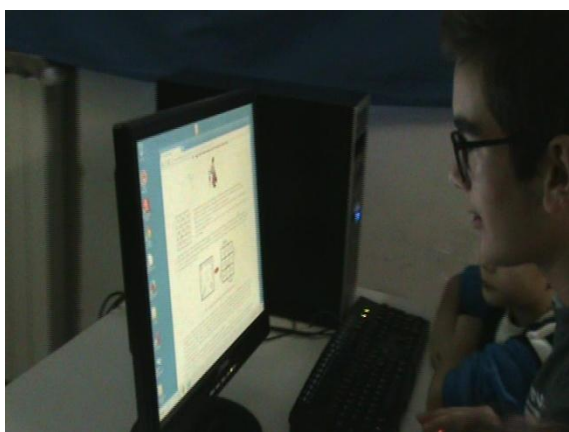


Foto 1



Foto 2

Sessione 2: Lavoro sui concetti di "ordine di un quadrato" e "somma magica" (2h)

Gli studenti erano rimasti incuriositi dai nuovi concetti di "ordine di un quadrato" e "somma magica". Per quanto riguarda il primo di questi, sono state svolte le seguenti attività, a classe intera, guidate da domande poste dall'insegnante:

- discussione sul concetto;
- disegno alla lavagna di un quadrato corrispondente ad ogni ordine (da 1 a 6);
- descrizione delle operazioni da eseguire per disegnare tali figure;
- esplicitazione della relazione ordine di un quadrato - numero delle sue celle;
- nota della banalità del quadrato magico di ordine 1 e giustificazione della non-esistenza (impossibilità) di modelli per l'ordine 2.

Il passaggio dall'idea intuitiva di ordine a quella rigorosa non è stato facile, come hanno dimostrato i tentativi di descrizione verbale. L'attività di disegno è stata effettuata proprio per supportare questa costruzione concettuale ed effettivamente è risultata utile: alla fine, infatti, gli studenti sono stati in grado di dire che l'ordine è: *“il numero di celle lungo un lato”* o *“il numero di celle di ogni riga”*. Le difficoltà emerse nell'eseguire e nell'indicare i passaggi di un'istruzione hanno indirettamente evidenziato un difetto nello sviluppo di pensiero procedurale dei ragazzi, quale competenza matematica, difetto che è lecito supporre non limitato all'ambiente scolastico dove si è svolta la sperimentazione.

Il concetto di somma magica non ha generato problemi. La discussione su di esso ha portato ad un rimarchevole risultato raggiunto da uno studente (bravo) che ha esplicitato la regola di calcolo della somma magica in funzione dell'ordine:

“dall'ordine posso trovare il numero totale delle celle; poi, devo sommare tutti i numeri da 1 fino a questo numero trovato e, infine, devo dividere questo nuovo numero per il numero delle righe”. L'entusiasmo dei compagni di classe si è espresso con un applauso!

Richiami sulla numerazione corrente. Ancora lavorando a classe intera, l'insegnante ha guidato una riflessione sulla struttura della numerazione corrente, chiedendo ai ragazzi di argomentare sul significato di “cifra”, “valore di una cifra” e “valore di una cifra in rapporto alla posizione”.

Uno strumento molto utile per portare avanti l'attività è stata una tabella dei numeri da 0 a 99, disegnata alla lavagna, come nella figura qui sotto:

0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99

Questo schema ha permesso agli allievi di *visualizzare* la regolarità di distribuzione delle cifre nei ruoli di unità o decine e di fondare concretamente la discussione sulle ricorrenze delle cifre stesse.

Sessione 3: Decifrazione del quadrato magico di Xian. (1 ora)

Soluzione di un “curioso” quadrato magico.

Gli alunni sono stati impegnati, in piccoli gruppi, nella decifrazione di un quadrato magico di ordine 6, con le cifre rappresentate da figurine familiari. Hanno lavorato utilizzando schede predisposte, con griglie e domande-guida per lo svolgimento del lavoro (vedi Allegato A.3). All’inizio, hanno operato per tentativi, assegnando certi valori numerici ad alcune figure e cercando di verificarne la coerenza; poi, dietro suggerimenti del docente, hanno adottato vie più sistematiche utilizzando le informazioni deducibili dalla tabella, sviluppata fino al numero 36. Molti hanno apprezzato la differenza tra procedere in “modo casuale” o in “modo ordinato”. (foto 4a e 4b).



Foto 4a



Foto 4b

Soluzione del quadrato magico di Xian.

Infine, l'insegnante ha dato ad ogni gruppo una copia dell'antico quadrato magico con il compito di decifrarlo: la corrispondenza tra i simboli riportati nel quadrato precedente e in quest'ultimo è stata immediata ed ha condotto rapidamente alla soluzione. Per rappresentare la corrispondenza è stata usata una delle griglie predisposte. (foto 5).



Foto 5

I numeri nei popoli dell'Egeo

Greci

(1000 a.C.)

SISTEMA ADDITIVO

α' = 1	ι' = 10	ρ' = 100
β' = 2	κ' = 20	σ' = 200
γ' = 3	λ' = 30	τ' = 300
δ' = 4	μ' = 40	υ' = 400
ϵ' = 5	ν' = 50	ϕ' = 500
ζ' = 6	ξ' = 60	χ' = 600
η' = 7	$\omicron'$ = 70	ψ' = 700
θ' = 8	π' = 80	ω' = 800
δ' = 9	ι' = 90	γ' = 900

$\alpha = 1000; \quad \beta = 4000; \quad \rho = 100.000.$

Pur essendo passati alla storia per il grande sviluppo delle conoscenze in tutti i campi del sapere, i Greci non trovarono un sistema di numeri più efficiente rispetto ai popoli che li avevano preceduti. Per scrivere i numeri, essi usarono le loro 24 lettere, a cui aggiunsero altri tre simboli. Per distinguere i simboli numerici da quelli letterali, mettevano in alto a destra una specie di apostrofo; l'apostrofo messo in basso a sinistra moltiplicava per 1000 il valore del numero.

$$\rho' \chi' \gamma' = 123$$

Foto 6

Sessione 4: Angolo culturale (1 ora)

Una visione storica dell'evoluzione delle cifre arabe è stata fornita usando un insieme di schede - preparate dalle insegnanti - sugli elementi caratterizzanti i sistemi di numerazione elaborati in varie antiche culture (sumera, babilonese, egizia, indo-araba, maya, greca, cinese e romana), sul sistema numerico dei computer e sulla storia dello zero. La classe è stata divisa in undici gruppi, ciascuno dei quali ha ricevuto una scheda da leggere, da riassumere ed infine da esporre a tutti i compagni. I componenti di ogni gruppo hanno giocato a scrivere un numero nel sistema che era stato loro assegnato.

Test finale. (1 ora)

Agli alunni è stato proposto un questionario finale (vedere Allegato A.3) per verificare la traccia del lavoro fatto, circa cinque mesi dopo la fine dell'attività. Le risposte hanno fornito molte tracce educative. Quelle più importanti e generali si riferiscono alla densità e profondità dei contenuti della proposta che richiede *tempo* per essere realizzata, per utilizzare il suo pieno potenziale di apprendimento.

Commenti

Riguardo alla *componente affettiva*, la proposta si è rivelata attraente, sia per la natura inconsueta e le origini fiabesche dell'oggetto trattato, sia per il ruolo di investigatori che assegna agli alunni. Nonostante la fatica mentale richiesta (quasi da tutti esplicitamente dichiarata!), la nuova esperienza è stata vissuta come un gioco, che ha anche generato un clima di positiva competizione tra i gruppi e suscitato momenti di soddisfazione e gioia. Dal *punto di vista cognitivo*, l'attività ha richiesto agli studenti un accurato lavoro di rivisitazione di concetti noti, con significativi effetti sulla consapevolezza di proprietà e regolarità numeriche e sul senso dei simboli. Inoltre, si è prestata alla determinazione di formule generali (per la somma dei primi n numeri

naturali e il valore della “chiave magica”). In ambito linguistico, essa ha offerto valide occasioni educative nel raccogliere informazioni da un testo e sintetizzarle, nel comprendere istruzioni, descrivere procedimenti e definire oggetti.

Dagli ostacoli emersi, i docenti hanno potuto operare una valutazione dell'apprendimento matematico pregresso dei loro allievi, evidenziando presenza di *stereotipi linguistici* - che mostrano una costruzione concettuale inadeguata - e tendenza alla *sistemazione approssimativa*. Nell'ambito considerato, infatti, anche tra i ragazzi madrelingua, sono state rilevate sia *difficoltà a spiegare* il rapporto “cifra-posizione-valore”, il ruolo della “base” nella rappresentazione numerica, l'influenza di questa sull'elaborazione di algoritmi di calcolo, che *difficoltà ad eseguire e spiegare* la procedura della costruzione geometrica di un quadrato diviso in un certo numero di celle congruenti.

ALLEGATI

A.1

La storia raccontata.

Una nostra amica archeologa, era andata per un viaggio di studio in Cina, dove aveva avuto modo di visitare il Museo di Xian. Qui era rimasta molto incuriosita da un particolare reperto archeologico: una tavola del XIII secolo con inciso uno schema quadrato contenente strani segni. La didascalia sottostante riportava la frase: “*Quadrato di ordine 6 su placca metallica*”.

Tornata in Italia, si era rivolta a noi, sue amiche “matematiche”, per avere una spiegazione del significato di quello schema simbolico.

Noi abbiamo risolto l'enigma e, siccome ci siamo divertite, vogliamo proporre anche a voi questo gioco di scoperta ... Vi diciamo soltanto che il quadrato inciso sulla placca è un “quadrato magico”.

Il primo passo del vostro lavoro sarà dunque andare a cercare in Internet che cos'è un quadrato magico.

A.2



Osservate questo quadrato con numeri nelle caselle.

Qui sotto abbiamo trascritto alcuni comandi e domande alle quali vi chiediamo di provare a rispondere:

- Quali numeri compaiono nelle caselle del quadrato?
- Addizionate i numeri di ogni riga del quadrato. Che cosa potete notare?
- Addizionate i numeri di ogni colonna del quadrato. Che cosa potete notare?
- E addizionando i numeri di ciascuna diagonale del quadrato. Che cosa trovate?

Adesso scrivete tutto quello che avete scoperto!

A.3

A scuola è arrivato un bambino nuovo...

1. Prova a spiegargli che cos'è un quadrato magico.
2. Digli che cosa ti ha colpito dell'attività svolta per riuscire a decifrare il quadrato magico con le figurine.
3. Il bambino non sa disegnare un quadrato diviso in caselle quadrate uguali. Raccontagli come si fa.

Inoltre è curioso di sapere come si scrive un numero nel nostro sistema di numerazione. Prova a spiegarglielo.

Terza sperimentazione

di Hana Moraová***

Il materiale didattico è stato sperimentato nella classe 5° (primaria) e 7° (secondaria) nella ZŠ Fr. Plamínkové, una scuola di Praga. Siccome nella scuola non ci sono pressoché alunni migranti, il materiale è stato sperimentato utilizzando la metodologia CLIL, cioè le lezioni hanno avuto due obiettivi, matematico e linguistico. Questo ha voluto significare il simulare la situazione in cui i bambini lottano per comprendere la lingua di istruzione in una lezione di matematica, poiché la lingua di istruzione non è la loro lingua madre.

Le lezioni sono state video-registrate.

La sperimentazione ha avuto, in entrambe le classi due obiettivi primari: sviluppare le abilità linguistiche degli alunni, introduzione (revisione) di concetti chiave in inglese (riga, colonna, diagonale, sommare, moltiplicare, somma, prodotto ecc.). L'unità didattica è stata pensata per sviluppare le abilità linguistiche ricettive e produttive degli alunni: la sperimentazione è iniziata con una conversazione su magie, segreti, superstizioni e leggende, tramite la narrazione della leggenda di Lo-Shu. Gli alunni hanno anche cercato di rispondere in inglese alle domande dell'insegnante. Gli obiettivi matematici sono stati cercare numeri magici, ragionamento matematico, formulazione di argomentazioni, scoperta di proprietà di operazioni numeriche. L'esperienza didattica si è conclusa facendo lavorare gli alunni a un algoritmo elementare: come costruire un quadrato magico di ordine dispari.

Prima sperimentazione: classe 7^a, lezione CLIL, utilizzo della LIM – fruendo della possibilità di scrivere su un disegno esistente del guscio della tartaruga, avere esperienza di matematica in lezioni di inglese, senza l'ostacolo della lingua.

Obiettivi linguistici: attività di parlato – discutere di magie e miracoli; attività di ascolto – la leggenda di Lo Shu.

Obiettivi matematici: ricerca di modelli e regolarità, scoperta (riscoperta) di proprietà di operazioni aritmetiche, modelli in una griglia quadrata.

Problemi incontrati: c'era un errore nella presentazione del disegno sulla tartaruga, cioè i numeri ottenuti non davano origine a un quadrato magico.

Quando è stato chiesto di moltiplicare ciascun numero per lo stesso numero, alcuni alunni hanno moltiplicato 1x1, 2x2, 3x3 ecc., cosa che non dà un numero magico.

Preparazione: discussione – cosa sono le leggende, qual è la differenza fra una leggenda e una favola, ti piacciono leggende e magie? Dai esempi di leggende...?

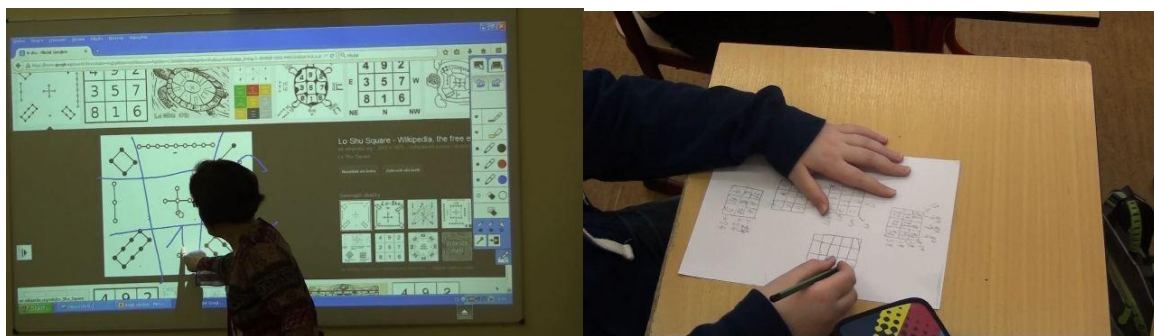
Introduzione: Viene raccontata la leggenda di Lo-Shu.

*** Facoltà di Educazione - Charles University in Prague, Repubblica Ceca.

Attività principale

1. scoprire i numeri in un quadrato magico e ciò che rende magico un quadrato magico (non riuscito a causa di un disegno errato)
2. scoprire che cosa accade se lo stesso numero è sommato a ciascun numero: sarà ancora magico? Perché?
3. scoprire che cosa accade se ciascun numero è moltiplicato per lo stesso numero (mal compreso da due alunni)
4. scoprire che cosa accade se scambiamo righe o colonne equidistanti dal centro
5. mostrare la regola per mettere i numeri in un quadrato magico
6. gli alunni lavorano su un quadrato 5×5 , cercando di disporre i numeri, alcuni finiscono in tempo e in modo positive, l'insegnante controlla e cerca di aiutare se vi sono problemi

La fine della lezione. L'insegnante decide di sperimentare di nuovo la stessa unità didattica, cercando di eliminare i problemi presentatisi in questa lezione.



2^a sperimentazione: classe 5^a, lezione CLIL lesson, uso della LIM – usufruendo della opportunità di scrivere sulla figura esistente del guscio di tartaruga, la prima lezione di matematica in inglese

Obiettivi linguistici: speaking – discutere su magia e miracoli, listening – la leggenda di Lo Shu, introduzione del vocabolario matematico di base in inglese (pari, dispari, moltiplicare, sommare, sottrarre, diagonale, linea, colonna).

Obiettivi matematici: ricerca di modelli e regolarità, scoperta di proprietà di operazioni aritmetiche.

La progettazione originale della lezione è stata modificata per evitare alcuni dei problemi delle lezioni precedenti (l'immagine scelta aveva la forma giusta, così gli alunni hanno potuto veramente scoprire i numeri sul guscio)

Warm up: Cosa significa magico? Attività di conversazione, raccolta di idee dagli alunni.

Introduzione: L'insegnante racconta la storia di Lo-Shu stando attenta alla comprensione (termini più difficili come allagamenti, tartaruga, sacrificio).

Attività principale:

1. La foto della forma sul guscio viene proiettata sulla LIM, viene fatta una griglia e agli alunni viene chiesto di pensare perché questo è magico.

Alunni molto attivi nella ricerca di decine di differenti regolarità (forma di numeri pari e dispari, soma di numeri in un triangolo, soma di numeri negli angoli, etc.), dopo circa 7 minuti di tentativi è stata scoperta l'idea di 15 (tramite l'idea che i numeri opposti hanno come somma 10).

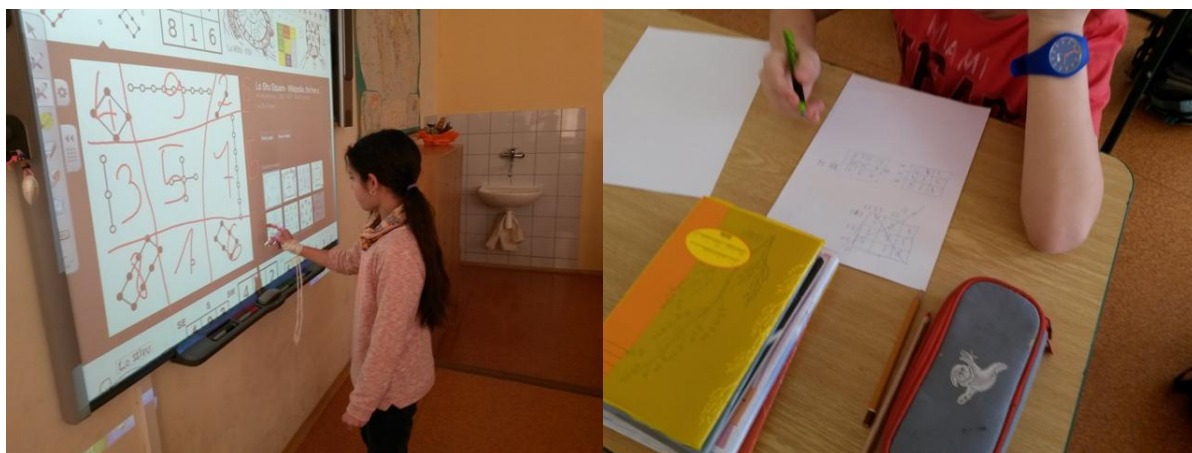
2. Agli alunni viene chiesto di sommare lo stesso numero a ciascun numero, viene scelto un numero (il 6) con cui tutti dovrebbero lavorare, gli alunni lavorano e scoprono che il quadrato è ancora magico, l'insegnante chiede il perché.

Dopo alcune proposte, gli alunni si accorgono che la differenza fra la somma originale 15 e la nuova somma 33 è 18. Con l'insegnante si accorgono che 18 è 3 volte 6, cioè il nuovo numero viene sommato tre volte in ciascuna riga, colonna e diagonale.

3. Agli alunni viene chiesto di moltiplicare ogni numero per lo stesso numero (tenendo conto dell'esperienza fatta nella classe 7^a, viene scelto il numero 3 e i primi tre numeri sono calcolati insieme come esempio, per evitare ambiguità); gli alunni lavorano e trovano che il quadrato è ancora magico, essendo la somma 45; di nuovo viene chiesto loro il perché.

Gli alunni provano, propongono idee differenti sul perché funziona ma hanno notevole bisogno dell'insegnante per accorgersi che 15 volte 3 fa 45, cioè moltiplicando ciascun addendo, o l'intera somma per lo stesso numero si ottiene lo stesso risultato.

La lezione è finita. Siccome era stato lasciato più tempo per scoprire che il quadrato era magico, sono state svolte poche attività. Ma l'insegnante ha considerato questa lezione come la migliore e la più utile per gli alunni che avevano scoperto da soli la maggior parte delle cose.



Conclusioni dalle tre sperimentazioni

di Marie-Hélène Le Yaouanq e Brigitte Marin

Queste sperimentazioni tendono a confermare l'interesse dell'attività "Quadrato magico" e la sua adattabilità a livelli di classe diversi (dalla classe quinta primaria alla seconda della secondaria di I grado).

Per prima cosa e soprattutto, gli studenti si trovano attivamente in una posizione di ricerca. La presentazione della leggenda, l'aspetto "magico" della situazione, consentono un coinvolgimento degli studenti che sono recettivi alla dimensione giocosa e a una presentazione che dà loro l'impressione di raccogliere una sfida. Questo coinvolgimento rimane perfino in una sequenza di tre o quattro sessioni.

In Francia e in Italia, iniziare l'attività con una ricerca su internet seguita da scambi di opinioni e dalla scrittura di una relazione finale, sviluppa competenze relative al cercare, classificare e utilizzare le informazioni, così come competenze nella gestione della lingua sia scritta che parlata. Nella Repubblica Ceca, la scoperta della situazione, condotta in inglese, è piuttosto vicina alla scoperta del lavoro fatto in Francia con gli studenti allofoni.

Comunque, nelle attuazioni si presentano differenze.

Si possono osservare differenze nella durata da 1 a 4 sessioni, che sono collegate ai differenti obiettivi per la matematica. Il lavoro matematico include la scoperta del quadrato magico, ma poi si focalizza sulla numerazione nel caso della decodifica dell'antico quadrato magico o la scoperta di alcune proprietà matematiche di un quadrato magico.

L'aspetto multiculturale e storico è trattato in modo diverso in Italia, con un lavoro di gruppo sulle differenti numerazioni, e in Francia, con discussioni nella classe, basate sulla presenza di studenti stranieri.

La decodifica dell'antico quadrato magico mette enfasi sulla difficoltà del simbolismo, ma anche sulle vere difficoltà di ragionamento riguardo alla numerazione e alla posizione di una figura in un contesto che è differente dagli esercizi "classici", che possono portare a risposte stereotipate senza costruire il concetto in maniera abbastanza forte. L'aspetto storico e lo studio di differenti numerazioni è per conseguenza una estensione interessante da un punto di vista matematico.

La decodifica del quadrato magico conferma che gli aspetti linguistici e cognitive sono intimamente collegati. Pertanto, una difficoltà nel ragionamento matematico obbliga gli studenti a dialogare in modo preciso per poter essere capaci di andare avanti e, in altri momenti, le difficoltà di esprimere ciò che hanno perfettamente capito da un punto di vista matematico li rende consapevoli della necessità di lavorare sulla lingua. Il caso che è stato esaminato sembra fornire un contesto che permette lo

sviluppo sia le competenze linguistiche che matematiche, continuando a essere motivante per gli studenti e adattabile a differenti livelli di classe e a obiettivi diversi.