

TOVÁRNA NA TROJÚHELNÍKY

Maria Piccione*

ÚVOD

Tato jednotka se zabývá jednou za základních oblastí školní geometrie, konkrétně trojúhelníkem, jeho základními vlastnostmi a vztahy v něm.

Tvar geometrických obrazců tvoří jeden za základních prvků matematického myšlení a společně s velikostí je charakteristickým prvek euklidovské geometrie. V Itálii je trojúhelník jedním z nejdůležitějších témat na 2. stupni. Předkládaná jednotka je úvodem do tohoto tématu. Je postavena tak, aby u žáků podpořila rozvoj myšlení.



Cíle

Vyučovací jednotka má kognitivní, metakognitivní a afektivní cíle.

Kognitivní cíle:

- Vylepšení procesu vizualizace
- Realizace procesu matematizace
- Strukturování pojmů konstanta/proměnná v určité třídě objektů
- Rozvoj kombinatorického myšlení

*Katedra informatiky a matematiky, Univerzita v Sieně, Itálie

- Rozvoj schopnosti graficky znázorňovat
- Rozvoj jazykových dovedností – v běžném i matematickém jazyce
- Budování pojmu trojúhelník
- Nalezení podmínky existence („trojúhelníková nerovnost“) a podmínky jednoznačnosti pro trojúhelníky
- Určení kritérií podobnosti trojúhelníků

Metakognitivní cíle:

- Rozvoj chápání vztahu mezi konáním a porozuměním
- Rozvoj chápání vztahu mezi věděním a vysvětlováním

Afektivní cíle:

- Budování sebedůvěry
- Rozvíjení radosti z činnosti, pozorování a objevování

Metodický rámec

Euklidovská geometrie hraje významnou roli v rozvíjení vědeckého myšlení. Jsou dva důvody, proč je takto důležitá:

- jde o teoretický systém, který znázorňuje reálné situace a který lze vnímat lidskými smysly;
- přirozeně rozvíjí používání metody dokazování.

Geometrické vzdělávání musí stavět na vztazích mezi prostorem a objekty, obzvláště na 1. a 2. stupni. V tomto smyslu hovoří například H. Freudenthal, který uvádí, že „*Geometrie je pochopení prostoru*.“¹, nebo Poincaré, který zdůrazňoval důležitost pohybu pro uchopení prostoru². V tomto smyslu hovoří i další vědci, psychologové a pedagogové, například Enriques, Weyl, Piaget. Body, úsečky, trojúhelníky i další celky, kterými se geometrie zabývá, nejsou konkrétní objekty. Jde o objekty, které lze znázornit či konstruovat rýsováním, nebo s pomocí logicky strukturovaných materiálů. Z metodologického hlediska je geometrie založená na interakci s realitou, což poskytuje dobrý základ pro intuitivní stádia kognitivních procesů a aplikací teorie. Žáci jsou vedeni k tomu, aby pracovali dvěma způsoby: „zdola nahoru“, od reality k abstraktnímu „modelu“, jehož předmět lze vnímat velmi striktně, a „shora dolů“, od modelu k realitě s tím, že mají k dispozici nástroje pro interpretaci a popis. Tato dvojitost cest ale znamená, že musíme velmi pečlivě hlídat, aby jedno nebylo zaměňováno za druhé. Od 60. let 20. století byl v anglosaském světě kladen velký důraz na rozvoj myšlení v geometrii. Ve Francii se vydali cestou bourbakistů (hlavně na středních školách). V Itálii docházelo pozvolna k přerodu od klasického vzdělání

¹H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, 1973, s. 403.

² H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Paris: Flammarion, 1902, s. 78. (V originálu : „*un être immobile n'aurait jamais pu acquérir la notion d'espace*“)

k více experimentálním přístupům a používání heuristických přístupů, přičemž tyto přístupy nebyly jasně oddělovány.

Přesto v dnešních učebnicích stále převládá nominalismus, statické obrazce a vzorce pro výpočty. Zcela jinak vypadá práce E. Castelnuovo, která v učebnici vychází ze své průkopnické knihy *Geometria intuitiva* (1948) a prvků Montessori pedagogiky.

V dnešní době můžeme díky rozvoji neurologie a kognitivních věd interpretovat „geometrickou inteligenci“ lidí jako síť kódování a analogických reprezentací, získaných v rámci běžné činnosti v reálném světě. Díky tomu dnes můžeme vědecky vysvětlit tvrzení, která byla pouze intuitivní, ač dokázaná experimenty.

Navíc *enaktivismus*³, obecná teorie poznání, která vychází z biologie a zkušenostní filozofie, ovlivňuje pedagogiku tím, že definuje *odehraný model* a propojuje své přístupy s dalšími metodologiemi a teoriemi (jako *činnostní učení*, *smyslová kognice*, *kooperativní učení*...). Základ této teorie lze shrnout následujícím způsobem:

Subjekt je živá bytost, která je schopna sama dávat smysl procesům a situacím, které vycházejí ze vztahu mezi venkovním prostředím a vnitřními individuálními strukturami nezávisle na momentálním stavu.

Tento přístup se zaměřuje na *vnímání jako situačně podmíněnou aktivitu*. Metoda aktivního učení E. Castelnuové vychází z tohoto teoretického rámce a je základem předkládaného materiálu.

Návrh vyučovací jednotky

Vyučovací prostředí vychází z použití dynamických modelů, které vznikají s použitím prvků stavebnice „geometrické Meccano“. Tuto stavebnici tvoří tyčky různých barev a délek (plastové, dřevěné i kovové), na kterých jsou otvory ve stejně velkých rozestupech, a dále háčky a provázky. (Fotografie 1).



Fotografie 1. The material for the activity

Pokud je to možné, doporučujeme nechat žáky, aby si tyčky vytvořili sami podle písemného návodu – v něm by byly uvedeny délky tyček a počet otvorů; žáci by nejprve podle návodu vše narýsovali na papír, karton či plast, poté vystřihli a udělali díry.

³Teorii, která původně vychází od biologů Maturana a Varela (1984), explicitně představuje Varela, Thompsona a Rosch (1991).

Cílem této aktivity je, aby žáci získali senzomotorické zkušenosti s trojúhelníky a aby zvládli potřebnou terminologii – jak v psané, tak v mluvené formě. Zvolené téma navíc poskytuje prostor pro multikulturní pohled na lidské poznání a technologii.

Organizační formy práce:

- ve dvojicích a malých skupinách, když žáci vytvářejí 2D modely, analyzují své výrobky, obrázky a náčrty, píšou poznámky a komentáře;
- celá třída při diskuzi a porovnávání výsledků.

Materiál je rozdělen do tří částí: 1. část slouží jako úvod; 2 a 3. část vytvářejí přirozenou kognitivní cestu od prvotní představy třístranného obrazce k pojmu trojúhelníku, a to až k podmínkám podobnosti. Každá část probíhá v několika krocích.

1. část • <i>představení materiálu a toho, jak se používá, příklady realizovatelných sestav</i> • <i>volná tvorba libovolných obrazců</i> • <i>grafické znázornění nejhezčích výtvorů (při zachování jejich struktury)</i> • <i>motivace prostřednictvím nejrozličnějších aktivit (individuální práce se stavebnicí; hledání obrázků; zkoumání výskytu trojúhelníkových tvarů v přírodě a mezi lidskými výtvary; experimentování)</i> • <i>diskuze a dokládání významu tohoto tvaru.</i>
2. část • <i>hledání podmínky existence trojúhelníku prostřednictvím činnosti, v jejímž rámci žáci zkoumají možné případy</i> • <i>upevňování představ díky grafickým znázorněním obrazců, příklady obou významných odlišných případů</i> • <i>řešení kombinatorické úlohy o počtu možných trojúhelníků tvořených s pomocí pěti tyček a vysvětlení výsledku.</i>
3. část • <i>konstrukce trojúhelníku, pokud je pevně dán jeden prvek (strana nebo úhel), a zkoumání výsledků při změnách ostatních prvků</i> • <i>konstrukce trojúhelníků, pokud jsou pevně dány dva prvky (úhel a strana, dvě strany nebo dva úhly) a zkoumání výsledků při manipulování s ostatními prvky</i> • <i>tvoření úloh zaměřených na důsledky pevného určení dalšího prvku (strana/úhel)</i> • <i>zavedení terminologie a definice konkrétních druhů trojúhelníků</i> • <i>řešení úloh na určování trojúhelníků.</i>

ANALÝZA APRIORI

Cílem navrženého materiálu je nabídnout pomoc v současné situaci výuky v kulturně heterogenních třídách, kde:

- rostou rozdíly mezi jedinci (podle země původu a její kultury, předchozího vzdělání, úrovně kognitivního rozvoje, úrovně znalosti vyučovacího jazyka,...)
- narůstá množství projevů obav a strachu (projevy izolace, nedůvěry, lhostejnosti ke školní práci, neschopnost se soustředit a zapojit)

Původní myšlenka tohoto materiálu je:

- vytvoření prostředí, které podporuje aktivitu a individuální zkušenosti v sociálním kontextu a poskytuje nástroje umožňující omezení mluveného výkladu.

Vzdělávacím cílem je:

- umožnit každému, aby uplatnil kognitivní procesy, a to i v případě jazykových problémů
- propojit rozvoj v jazyce se zkušeností a vztahy s vrstevníky.

Volba materiálu a jeho použití se zaměřuje na rozvoj představivosti a mentálních obrazů. Jde o proces, který je nezbytný pro konceptuální reprezentace, jejichž jednotlivé fáze jsou strukturalismem definovány takto: *senzomotorická zkušenost – mentální obraz – pojmy*).

PILOTOVÁNÍ

Materiál byl pilotován ve dvou třídách primy nižšího gymnázia Ghándí ve Florencii. V jedné třídě bylo 22 žáků, z toho 6 přistěhovalců a 5 žáků se specifickými vzdělávacími potížemi. Ve druhé třídě bylo 21 žáků, z toho 7 přistěhovalců a 5 žáků se specifickými vzdělávacími potřebami. Jednotku pilotovali dva učitelé (G. SallustioaA. Scialpi) ve spolupráci s didaktikem matematiky.

Před samotným pilotováním proběhla diskuze mezi didaktikem a oběma učiteli.

Práce proběhla ve třech částech.

1. část: Seznámení s materiálem (1,5 hodiny)

Přestavení stavebnice „Geometrické meccano“

Tato část proběhla společně se žáky obou tříd. Žáci se se stavebnicí setkali poprvé v životě, takže nejprve se seznámili s tím, jak s ní pracovat. Učitelům tato část posloužila k zjištění schopností jednotlivých žáků: učitelé nejprve stavebnici předvedli, ukázali, jak tyčky spojovat háčky a jaké různé obrazce lze ze stavebnice vytvářet.

První volné výtvary

Tato aktivita proběhla v malých skupinkách 3 až 4 žáků. Seděli okolo spojených pracovních stolů.

Každá skupina měla k dispozici zhruba 15 až 20 tyček a háčky. Mohli zcela libovolně vytvářet nejružnější obrazce (obrázky 1.2, 1.3). Pak měli za úkol ty nejhezčí z nich namalovat a tak okopírovat vytvořené konstrukce na listy papíru. Náčrty učitel vybral

(aby z nich později mohl udělat výstavu o průběhu celého vyučovacího experimentu – viz fotografie). Ještě než žáci začali pracovat, učitel jim řekl, že v dalších hodinách se zaměří na obrazce se *třemi stranami*.

2. část: Motivace (4 hodiny)

Promýšlení práce (30 minut)

Tato fáze výukového experimentu proběhla v aule. Učitelé měli k dispozici dataprojektor a plátno. Projekce proběhla pro obě třídy společně.

Nejdříve dostal každý žák tři tyčky a háčky. Žáci byli vyzváni, aby:

- si prohlédli, jaký obrazec z tyček vytvoří;
- zavřeli oči a ve své mysli hledali trojúhelníkové útvary ze skutečného světa;
- napsali název mentálního obrazu a načrtli ho na papír.

Učitel poté náčrty vybral a zmínil některé z navržených příkladů. (Fotografie 2).

Komentované promítání (30 minut)

Promítání rozsáhlé sbírky fotografií. Účelem této aktivity bylo, aby si žáci uvědomili, s kolika trojúhelníky se mohou setkat v reálném světě (Fotografie 3).

Následující činnosti probíhaly paralelně ve dvou třídách.



Photo 2



Photo 3

Vyhledávání na internetu (1 hodina)

Žáci pracovali v počítačové učebně v malých skupinách. Za asistence učitele vyhledávali webové stránky o trojúhelnících; aktivita byla ukončena výběrem sady trojúhelníků, které se žákům nejvíce líbily.

Multikulturní pohled (1 hodina)

Na úvod učitel žákům řekl, že trojúhelníky byly běžně požívány ve všech kulturách i obdobích lidské historie, od pravěku po současnost. Následovala diskuse o významných příkladech:

- každodenní použití a aplikace (nástroje, hroty šipek, ...),
- první přístřešky (stany a chatrče),
- architektonické prvky (stavba střech, mřížové budovy, nosníky ...),

- rozměry,
- plány a mapy (budov, bytů, měst, zemí ...),
- umělecká díla.

Žáci se začali ptát, proč je trojúhelník tak populární. Zazněly následující myšlenky:

- pevnost trojúhelníkového tvaru,
- možnost v průběhu mapování zvýraznit a opravit libovolný bod,
- estetická hodnota.

Dva experimenty (1 hodina)

Ve spolupráci s učitelem pracovního vyučování proběhly dva experimenty:

- Jeden experiment měl ověřit pevnost a tuhost trojúhelníkového tvaru. Důkaz proběhl za pomoci mačkání skutečného modelu, včetně modelu složeného z papíru.
- V druhém experimentu se žáci snažili změřit rozměry učebny za pomoci měřících tyčí. Místnost byla v podstatě obdélníková. Díky tomu si žáci mohli uvědomit, jak užitečné bude při měření narýsovat úhlopříčku. Viděli, jak moc pomůže, pokud pomocí měřících tyčí spojí dva protilehlé vrcholy.

3. část. Budování pojmů a jazykový rozvoj (3 hodiny)

Tato aktivita probíhala ve skupinách po třech až čtyřech žácích. Proběhla v několika navazujících krocích s rostoucí obtížností.

Podmínky existence trojúhelníku (1 hodina)

Tato aktivita začala konstrukcí trojúhelníka ze tří tyček. Každá skupina dostala dvě sady po třech tyčkách (nejprve jednu, poté druhou, aby nedošlo ke smíchání obou sad). Žáci měli s trojicí tyček pracovat a vytvářet různé obrazce. Cílem bylo, aby si uvědomili, že:

1. první trojice tyček umožňuje vytvoření *přesně* jednoho uzavřeného obrazce (konkrétně trojúhelníku);
2. z druhé trojice bylo možné vytvořit *celou řadu* různých „otevřených obrazců“... (Fotografie 4)

Výsledky byly zaznamenány v grafické podobě. Jeden žák potom obrazce představil zbytku třídy.

Učitel sledoval *spontánní* činnosti jednotlivých skupin: slovní komunikaci a použitou terminologii (jako „tyčka“, „strana“, „otevřený“, „zavřený“, „prostor“, „poměr“, „součet“, „délka“,...). Vyzval žáky, aby sepsali na papír, co přesně vidí. Věty začínaly „Vidím, že ...“. Učitel tyto věty vybral, aby mohl analyzovat závěry, ke kterým žáci došli.

Poté učitel nasměroval pozornost žáků k podmínkám existence trojúhelníku a počtu možností jeho vytvoření z daných prvků. Zadal následující úlohu (převzato z „Sticks and Triangles“, 21° RMT, upraveno jméno žáka):

<Ibrahim na lavici položí pět tyček různé délky: 4 jednotky; 5 jednotek; 6 jednotek; 9 jednotek; 11 jednotek. Kolik různých trojúhelníků z nich může sestavit? Vysvětlete všechny možnosti..>

Konstrukce trojúhelníku, je-li dán jeden prvek (strana/úhel) (1 hodina)

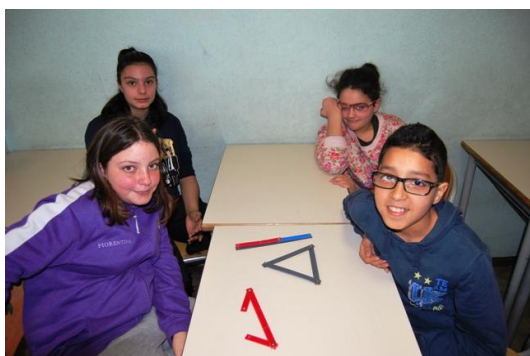
Učitel žákům řekl, aby pracovali s tyčkami, provázky a gumičkami a vytvářeli trojúhelníky. Pak měli čas na samostatnou práci. Poté vyvolal diskuzi položením následující otázky:

- *Které z prvků, které vidíte, se mění, pokud jimi manipulujete?*

Snažil se žáky podpořit v diskuzi.

Konstrukce trojúhelníku, jsou-li dány dva prvky (strana a úhel / strana a strana / úhel a úhel) (1 hodina)

Při této aktivitě učitel žákům řekl, aby zafixovali jednu stranu a jeden úhel a použili provázky k prodloužení jedné strany tak, aby se jim podařilo trojúhelník uzavřít. Žáci museli stavět, sledovat a vytvářet grafická znázornění vytvořených obrazců v různých konfiguracích (Fotografie 5).



Fotografie 4



Fotografie 5

Následujícími otázkami učitel navodil problémovou situaci:

- *Změní se něco, jestliže zadáme další úhel?*
- *Změní se něco, jestliže zadáme další stranu?*

Učitel vybral a uspořádal komentáře žáků.

Definice

Po této aktivitě žáci ústně popisovali různé speciální trojúhelníkové tvary a procvičovali odbornou terminologii (jako rovnoramenný, pravý, rovnostranný, obecný). Učitel žáky vyzval, aby si představili zástupce každého druhu trojúhelníků a aby popsali rozdíly mezi nimi.

Řešení úlohy

Cílem této fáze bylo ověřit schopnost žáků určovat různé druhy trojúhelníků (viz Příloha).

Vybraní žáci předvedli zajímavé výsledky své práce v rámci výstavy nejlepších prací. Tato výstava byla součástí slavnosti na konci školního roku (viz fotografie).

A POSTERIORI ANALYSIS

Z průběhu pilotování lze zformulovat několik závěrů; v následujícím textu se zaměříme na ty nejdůležitější, které ukazují, zda se podařilo dosáhnout očekávaných cílů.

- Potvrzení potenciálu stavebnice „geometrické meccano“ v procesu matematizace

Pilotování jasně ukázalo, že práce s touto stavebnicí ve společně sdíleném kontextu rozvíjí individuální interiorizaci externích operací. Zde se budeme zabývat pouze rolí, kterou stavebnice hrála při objevování trojúhelníkové nerovnosti. Ukázalo se, že tyčka ze stavebnice se opravdu může stát artefaktem, který se stane základem rodícího se pojmu úsečka, již v odborné terminologii označujeme jako stranu. Při pilotování jsme zaznamenali, že žáci nepovažují jednotlivé tyčky za stejně důležité. Nejprve pracují s tyčkou s pevnými konci, nazývají ji základní, a pak teprve uvažují druhé dvě tyčky, které jsou „svobodnější“. Tento postup přirozeně vede k tomu, že žáci rozlišují mezi dvěma různými druhy vrcholů: první druh jsou pevně dané vrcholy, druhou skupinu nazývali „zbytkové vrcholy“. Význam těchto „zbytkových vrcholů“ byl klíčový, protože jen díky nim mohli žáci uvažovat podmínky pro uzavření obrazce. V protokolech z 2. části pilotování jsou uvedeny některé výroky žáků z aktivity, ve které měli popisovat, co vidí. Díky této aktivitě probíhaly spontánní kognitivní procesy, což dokládá používání následujících slov žáky – např. „krátký/střední/dlouhý“, „proporční/neproporční“, „různý/stejný“. Žáci také používali výrazy, které souvisely s porovnáváním pomocí metrických jednotek. Nejpodstatnější kroky tohoto procesu se odehrály při práci s rovnostranným trojúhelníkem a zdegenerovaným trojúhelníkem. První případ žáci popisují větami typu „uzavřeme ho, protože strany jsou stejně velké“. Druhý případ (neočekávaný) je nesmírně důležitý, protože díky němu žáci formulují podmínku uzavřenosti trojúhelníku ve smyslu „délky“ a „součtu délek“. V tomto případě žáci uvažují délky dvou tyček dohromady jako rovnou délce třetí tyčky. Používají věty jako „ty dvě zbylé strany jsou doplňkové k první straně“, nebo „dvě strany dávají délku nejdelší strany“. V následujícím kroku žáci formulují trojúhelníkovou nerovnost: „obrazec uzavřeme, pokud jsou dvě strany delší než třetí z nich“.

- Nástroj na určení logických/geometrických kompetencí

Například:

1. neschopnost rozlišit mezi dvěma způsoby použití kvantifikátorů: pokud se obrazec uzavře, každá strana je kratší než součet ostatních dvou stran / jestliže

se obrazec uzavře, existuje *právě jedna* strana, která je delší než součet ostatních dvou stran.

2. neschopnost vyvodit podmínku podobnosti trojúhelníků.

Tyto potíže pramení z nedostatečné vizualizace a jazykových schopností (1), ale i z neschopnosti zvládnout vlastnost shodnosti (2).

- Nástroje pro hodnocení kognitivních rozdílů mezi žáky ve třídě.

Materiál se ukázal jako velmi vhodný pro ověření rozdílné úrovně kompetencí mezi žáky, kteří se pilotování účastnili. To učiteli pomůže v další práci s touto třídou. Příklady hraničních případů jsou:

1. neschopnost graficky znázornit určité konfigurace tyček (žák to byl schopen znázornit pouze pohybem ukazováčku) (fotografie),
 2. schopnost přijít s dokonalým popisem postupu výpočtu všech možných trojúhelníků v úloze „Tyčky a trojúhelníky“ (uvědomění si, že v jedné sadě se stejný trojúhelník objeví třikrát).
- Vhodnost materiálu pro použití v kulturně heterogenní třídě

Materiál umožňuje, aby s ním prococovali žáci nejrozličnějších úrovní a schopností, což je v kulturně heterogenní třídě nesmírně důležité. Ukázal se jako vhodný i pro žáky, kteří mají omezené znalosti italštiny. Když nic jiného, každý žák měl možnost se zapojit, tvořit a vidět skutečné předměty.

- Jazykový rozvoj

V rámci pilotování došlo k rozvoji jazykových dovedností žáků. Činnosti je vedly k tomu, aby mezi sebou komunikovali, aby porovnávali výsledky. To je mnohem víc než v klasické hodině, kdy jen poslouchají učitele. Zde je třeba podotknout, že slovní vysvětlování a uspořádávání myšlenek nebylo složité pouze pro žáky cizince. Nicméně cesta od vytvoření obrazce k následovnému popisu toho, jak obrazec vznikl, rozhodně vede k rozvoji jazykových kompetencí.

- Vliv na emoční stránky

Žáky činnosti nesmírně bavily. Mohli jsme sledovat jejich

- zvědavost a radost, když vytvářeli obrazce z tyček,
- potěšení ze skupinové práce,
- zájem o to, co přesně vidí a co mohou objevit,
- zájem o vztahy mezi skutečným světem a světem geometrie.

Všechny žáky práce bavila a dařilo se jim udržet pozornost po celou dobu. Nejvíce nás zaujal zápal žákyně z Číny, která do té doby odmítala zapojení do jakýchkoli výukových aktivit.

- Vliv na přípravu učitelů

Ve vztahu k vzdělávání učitelů lze tuto jednotku hodnotit jako přínosnou. V tuto chvíli jsou v pilotní škole čtyři učitelé, kteří po zkušenosti s pilotováním chtějí změnit svoji výukovou praxi.

Suggested reading

- Bartolini Bussi, M. G., Mariotti M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective, in English L. D. (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (second edition) (746-783). Routledge.
- Castelnuovo, E. (2008). *L'officina matematica: ragionare con i materiali*. Lorenzoni F. (ed.). Molfetta: La Meridiana.
- Furinghetti, F., Menghini, M. (2014). The role of concrete materials in Emma Castelnuovo's view of mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics* **87** (1-6). Dordrecht: Springer.
- Núñez, R. E., Edwards, L. D., Matos, J. F. (1999). Embodied Cognition as Grounding for Situatedness and Context in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics* **39**: (45-65). Dordrecht: Springer.
- Rossi, P. G. (2011), Didattica enattiva. Complessità, teorie dell'azione, professionalità docente. Milano: Franco Angeli

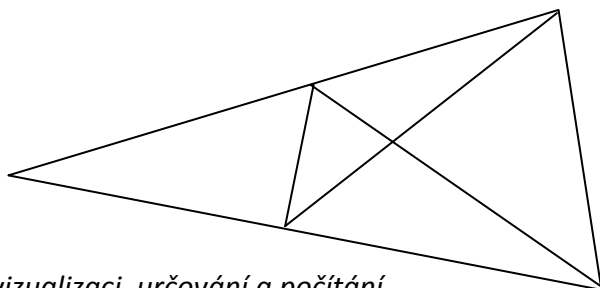
Suggested links

<http://www.di.ens.fr/~longo/geocogni.html>

PŘÍLOHA

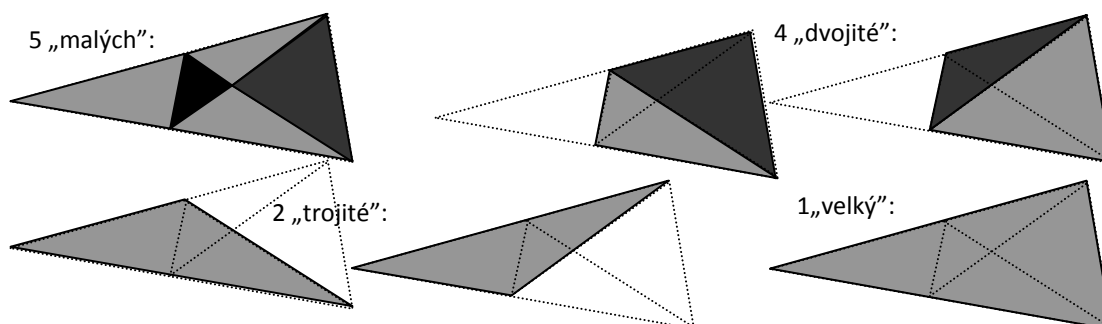
Úlohy

- „Dobře ukryto“ (otázka z 21° RMT)
Kolik trojúhelníků se skrývá v tomto obrazci?



Žáci používají: vizualizaci, určování a počítání

Řešení

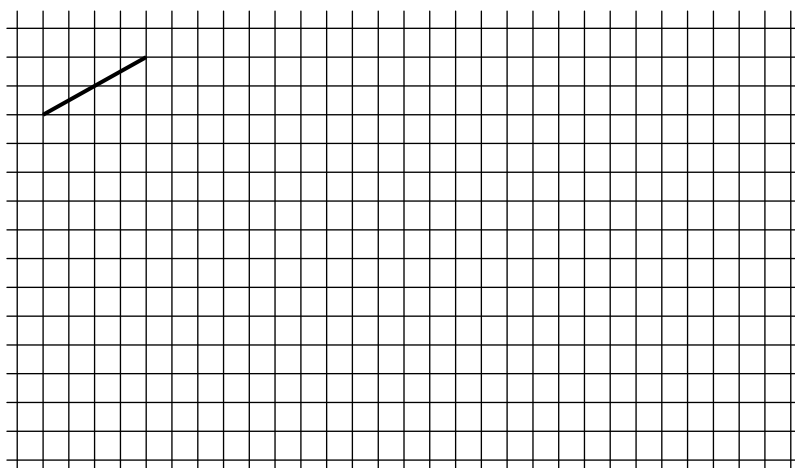


- „Vystřihování trojúhelníků“ (úloha z 19^o RMT)

Najděte různé trojúhelníky (nesmí se překrývat) v této čtvercové síti. Tyto trojúhelníky musí vyhovovat následujícím podmínkám:

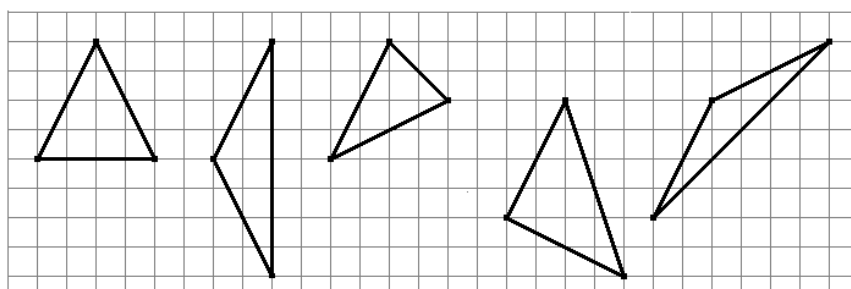
- *Dvě strany musí být stejně dlouhé, jako je již narysovaná úsečka.*
- *Vrcholy musí ležet na průsečících čtvercové sítě.*

Kolik takových trojúhelníků existuje? Nejprve je narysujte a poté vystřihněte.



Žáci používají: určení tvaru a velikosti, dedukci

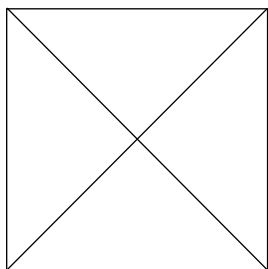
Řešení



- „Složený obrazec“

**Na papíru je narysovaný obrazec. Kolik trojúhelníků různého tvaru se v něm skrývá?
Popište tvary, které v obrazci odhalíte.**

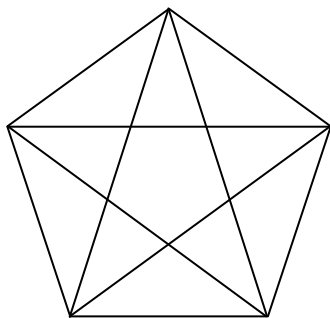
(a)



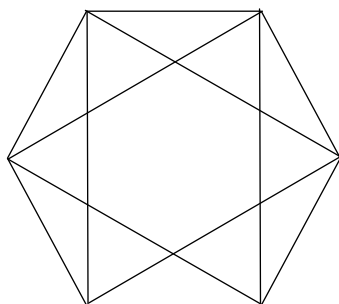
Žáci používají: analýzu tvaru a určování

Dvě složitější varianty této úlohy

(b)



(c)



- „Podlaha z trojúhelníků“

Navrhněte podlahu tvořenou z trojúhelníkových dlaždic, aby se vám líbila.

Žáci používají: analýzu tvaru a kombinace

Druhé pilotování

H. Moraová^{**}

Pilotování / jednotka vytvořená v Sieně – Trojúhelníky

Praha, 25. května 2014, 4 navazující hodiny, 7. třída, CLIL

Původní italská jednotka byla českým týmem upravena tak, aby vyhovovala podmínkám školy, ve které byla pilotována. Pilotování proběhlo v 7. ročníku ZŠ Fr. Plamínkové s rozšířenou výukou jazyků Praha 7. V 7. ročníku nebyli žádní žáci-cizinci. Proto byla jednotka pilotována metodou CLIL– Content and Language Integrated Learning), neboť výuka v cizím jazyce měla simulovat prostředí, ve kterém pro některé žáky není vyučovací jazyk jazykem mateřským. Pilotování proběhlo ve čtyřech po sobě jdoucích hodinách v den, kdy byl ve škole mimořádný rozvrh hodin.

Příprava experimentální výuky

Nejprve bylo třeba analyzovat vyučovací jednotku a přizpůsobit ji podmínkám dané školy. První problém, se kterým se učitelka musela vyrovnat, bylo použití speciální stavebnice „geometrické meccano“, která nebyla v české škole k dispozici. Učitelka se rozhodla, že místo dílů stavebnice použije dřevěné špejle.

Hodně pozornosti musela také věnovat zavedení potřebné terminologie v anglickém jazyce. Téma trojúhelníky používá poměrně mnoho termínů, se kterými se žáci v anglickém jazyce nesetkali (*obtuse, acutetriangles, rightangles, equilateral, isosceles, scalenetriangles* atd.).

S ohledem na to, že celé pilotování proběhlo v jediný den, bylo třeba velmi pečlivě naplánovat výuku tak, aby se v ní střídaly náročnější fáze s více odpočinkovými aktivitami. Z tohoto důvodu se například učitelka rozhodla umožnit žákům použít mobilní telefony při fotografování trojúhelníkových tvarů v nejrůznějších místech školní budovy. A ukázalo se, že tato část experimentu byla pro žáky velmi motivující.

Průběh pilotování

1. Úloha 1: Žáci dostali špejle, ze kterých měli vytvořit tyčky o délkách 4,5,6, 9 a 11 cm. Poté je učitelka vyzvala, aby z těchto tyček sestavovali trojúhelníky (obr. 1). Cílem této aktivity bylo, aby žáci sami vyvodili a zformulovali princip trojúhelníkové nerovnosti. Bohužel se ukázalo, že špejle nejsou optimální náhradou italské stavebnice. Konce jednotlivých kousků špejlí nebyly do špičky. To vedlo k tomu, že se žákům podařilo vytvořit trojúhelníky i v případě, že se součet délek dvou špejlí rovnal délce třetí špejle. Učitelka musela do aktivity vstoupit a vysvětlit, proč tato situace nastala. V opačném případě by žáci formulovali špatné závěry.

^{**} Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Česká republika

2. Společná formulace principu trojúhelníkové nerovnosti v anglickém jazyce. Učitelka ověřila, že žáci principu opravdu rozumí.
3. Žáci dostali pracovní listy s úlohami na procvičování trojúhelníkové nerovnosti – počítali možné délky chybějící strany a rozhodovali, zda konkrétní trojice čísel může vytvořit trojúhelník. V této části žáci více počítali a byla méně komunikačně zaměřená. Žáci zde neměli příležitost formulovat, definovat či odůvodňovat. V hodině věděné v cizím jazyce je ale dobré alespoň v některých částech odlehčit komunikativnost a poskytnout pocit úspěchu a bezpečí žákům, kteří si méně věří v cizím jazyce.
4. V další části hodiny se žáci seznámili se základními vlastnostmi trojúhelníku (obecný, rovnostranný, rovnoramenný, tupouhlý, ostroúhlý, pravoúhlý). Nové pojmy v anglickém jazyce učitelka představila s pomocí prezentace v Powerpointu. Jednotlivé pojmy byly ilustrovány na konkrétních příkladech. Poté učitelka postupně promítala různé druhy trojúhelníků a žáci je popisovali s použitím nových pojmů.
5. Poté žáci dostali barevné papíry. Jejich úkolem bylo vystříhat nejružnější trojúhelníky (obr. 2). Učitelka trojúhelníky vybrala a náhodně je rozdělila mezi žáky. Všichni měli za úkol tyto papírové trojúhelníky pojmenovat v anglickém jazyce, napsat např. rovnoramenný pravoúhlý apod.



Obr. 1



Obr. 2

6. Po této části experimentu, kde byla pozornost věnována jazyku a zvládnutí potřebné terminologie, učitelka přešla k fázi, která byla více kulturně zaměřena. Nejprve učitelka využila sbírku fotografií trojúhelníků v architektuře, kterou nachystali autoři vyučovací jednotky ze Sieny. K nejznámějším budovám z hlediska žáků rozhodně patří Dům opery v Sydney (obr. 3). Po architektuře následovaly trojúhelníky použité na nejružnějších symbolech a značkách (obr. 4). Poté učitelka žáky vyzvala, aby zapnuli své mobilní telefony, prošli školní budovu a vyfotografovali co nejvíc trojúhelníků, které uvidí. V této části experimentu byli žáci nesmírně kreativní, úkol je bavil. Hledali trojúhelníky na nejnežvyklejších místech (obr. 5 a 6). Obrázky z mobilů byly přehrány do počítače. Poté byly tyto trojúhelníky promítány. Žáci je klasifikovali a pojmenovávali s použitím termínů, které se naučili v předchozí části pilotování. Pořízené fotografie také pomohly odhalit některé

miskoncepce (obr. 7 – žáci vyfotili koláčový diagram jako příklad trojúhelníků, přestože jde o kruhovou výseč, protože jedna ze stran je oblouk, nikoli úsečka).



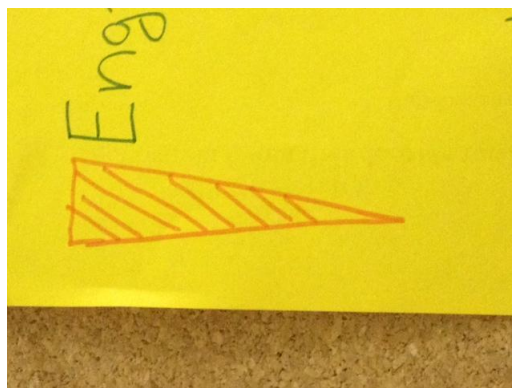
Obr. 3



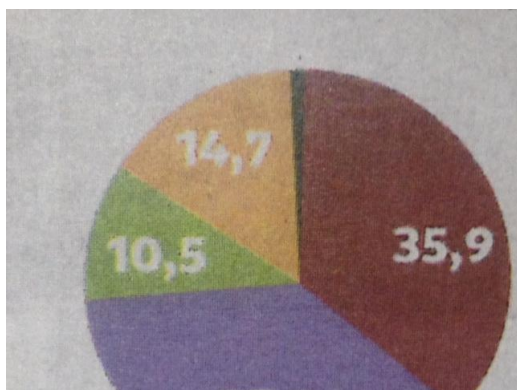
Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6



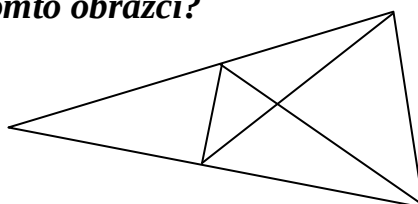
Obr. 7



Obr. 8

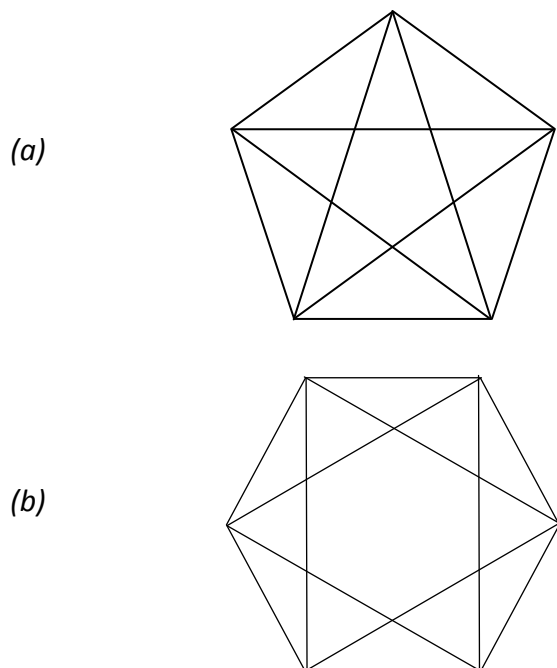
7. V následující části experimentu se učitelka vrátila k původní italské jednotce. Žáci dostali za úkol, aby navrhli podlahu z trojúhelníkových dlaždic (obr. 8).
8. V poslední části pilotování žáci ještě jednou věnovali pozornost kulturním tématům. Tato část začala úlohou „**Dobře ukryto**“ (otázka z 21^o RMT).

Kolik trojúhelníků se skrývá v tomto obrázci?



Poté se žáci zaměřili na pěti a šesticípou hvězdu, hexagram, Davidovu hvězdu a také na to, na vlajkách kterých národů jsou trojúhelníky (vyhledávání na internetu). Nejprve se věnovali úloze převzaté z původního italského materiálu:

Kolik je zde trojúhelníků?



Poté se žáci učili, jak konstruovat různé hvězdy, buď rýsováním, nebo překládáním papíru.

Analýza a posteriori

Pilotování ukázalo, že je italský materiál velmi dobře připraven. Podařilo se v něm smísit tradičnější prvky s velmi moderními, tvůrčími procesy, zkombinovat matematická a kulturní témata. Žáci tvořili, rýsovali, pracovali s předměty, vyslovovali hypotézy a pravidla. Celou dobu byli motivovaní a aktivně se zapojovali do práce. Velmi ocenili použití mobilních technologií a tvorbu vlastního návrhu podlahy.

Třetí pilotování

M.-H.LeYaouanq^{***} a B.Marin^{***}

ÚVOD

Třetí pilotování vedl učitel matematiky pan Paulou v 7. ročníku (odpovídá 7. ročníku na českých školách) ve škole Roger Martin du Gard. Tato škola leží v oblasti se vzdělávací prioritou (francouzsky: ZEP «Zoned'ÉducationPrioritaire»).

Podle francouzského kurikula se má v 7. ročníku probírat trojúhelníková nerovnost a obsah trojúhelníku. V kurikulu se neobjevuje pojem „podobnost“ a „shodnost“ trojúhelníků. Přesto se učitelé snaží vést žáky k tomu, aby při konstrukci trojúhelníku, když je dána jedna strana trojúhelníku, vnímali, že lze nad touto stranou sestavit různé trojúhelníky, které jsou po dvou souměrné podle této strany a podle jejího středu.

Pilotování proběhlo ve dvou fázích.

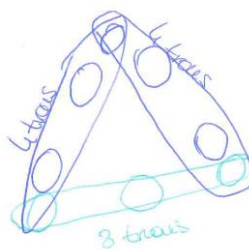
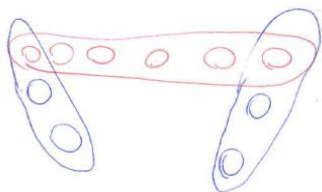
1. FÁZE: TROJÚHELNÍKOVÁ NEROVNOST

Tato fáze se skládala ze tří kroků.

V první fázi žáci pracovali se stavebnicí „Meccano“. Pracovali s plastovými tyčkami různých délek, které spojovali šroubky (viz obrázky 7 a 8). V této části hodiny pracovali ve skupinách. Dostali tyčky různých délek a úkolem bylo vytvořit z nich co nejvíce možných trojúhelníků.



Jednotlivé výsledky překreslovali na volný list papíru.



^{***} Univerzita UPEC, ESPE, Créteil (France).

Poté následovala společná práce, při které si žáci navzájem ukazovali, z čeho lze a z čeho nelze vytvořit trojúhelníky. Následovala hra: Žáci museli hádat, zda bude spolužák schopen z určitých délek vytvořit trojúhelník či nikoli. Učitel v této fázi nezasahoval (jen když bylo třeba zasahovat kázeňsky), žáci se snažili vše ústně vysvětlit. V této části se ukázalo, jak náročné je pro žáky přesně formulovat. Používali často nepřesné formulace jako „ne dost velká mezera“ nebo „uzavřít délky“ apod. (Margolinas, 2010).

Na konci hodiny ale bylo možné sledovat, že žákům se podařilo vytvořit si metodu, která jim umožnila určit, zda bude nebo nebude možné z daných délek vytvořit trojúhelník.

Následující hodina byla věnovaná formulování vlastností trojúhelníka. Znalost těchto vlastností pak byla použita při určování existence trojúhelníků. Žáci také sestrojovali různé možné trojúhelníky a zjišťovali, zda jsou shodné.

Všimli jsme si, že při konstrukci protáhlého trojúhelníka pomocí pravítka a kružítka měli žáci velké problémy (při rýsování s délkami 4, 5, 9), což se jim při práci se stavebnicí nestávalo, protože v tom případě okamžitě viděli, že se tyčky překrývají.

2. FÁZE:

Žáci provedli výzkum o vlajkách, na kterých se vyskytují trojúhelníky. Jejich úkolem bylo vybrat si jednu, popsat ji z geometrického pohledu, představit ji spolužákům a zkoumat význam jednotlivých prvků na vlajce (tvary, barva).

Výzkum žáci provedli za domácí úkol a jeho výsledky pak prezentovali před třídou. Žáci pracovali s velkým nadšením a prezentace byly opravdu kvalitní.

Práce byla završena tím, že žáci počítali obsah trojúhelníkových částí vlajky a poměr obsahů jednotlivých částí.

Literatura

Margolinas, 2010, Un point de vue didactique sur la place du langagier dans les pratiques d'enseignement des mathématiques

<https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-00470238/document> (retrieved on 01/05/2015)

Závěry ze tří pilotování

Maria Piccione

ZÁVĚR

V celém experimentu se prolínají dvě složky, které se dotýkají toho *co* a *jak* učit v kulturně heterogenní třídě. V materiálu je představen výukový model i sada praktických rad a doporučení. Pozorování z pilotování potvrzují, že jsme se vydali správným směrem.

Některá místa a rozhodnutí z jednotlivých pilotování si zaslouží doplňující komentář, ať už s ohledem na matematický nebo emoční přínos.

Ve druhém pilotování žáci pracovali s obyčejnými špejlemi: to jim umožnilo prakticky si vyzkoušet, jak se tvoří trojúhelník, a teprve potom přejít k zformulování trojúhelníkové nerovnosti. Zkušenostní charakter učení byl podpořen také prací s papírem, vystřihováním, skládáním, tvorbou složitějších trojúhelníkových obrazců či kachličkové podlahy. Pilotování je příkladem toho, jak dosáhnout vyšších úrovní aplikací pojmů délka a velikost úhlu. V pracovních listech žáci museli porovnávat délku a velikost úhlů. Zajímavá jistě byla i práce s rozmezím možných délek.

Ve třetím pilotování byla použita stavebnice Meccano. I zde autoři hovoří o tom, jak prospěšná byla manipulace se stavebnicí a zkušenostní forma práce. Práce se stavebnicí potvrzuje výsledky výzkumů, které upozorňují, že pravítko a kružítko nejsou optimálními nástroji pro pochopení trojúhelníkové nerovnosti. Při práci se stavebnicí do hry vstupuje hmat a pracuje se ve 3D prostředí. Při klasické výuce už jsou obrazce narýsované a možnost trojúhelníkovou nerovnost samostatně objevit žáci vůbec nemají.

Z pilotování také vzešly užitečné nápady a doporučení: to, že jsou jednotlivé dílky stavebnice proděrovány a mezi dírami jsou stejné vzdálenosti, vede k tomu, že žáci popisují trojúhelníky s pomocí počtu děr. Jde tedy o jistou formu měření (viz obrázek 3.?). Co je velmi zajímavé z hlediska vizuálního, je objevení *symetrie* v množině trojúhelníků, pokud je jedna strana pevně dána. Zajímavé byly také pokusy o měření obsahu a poměru obsahů.

V každém pilotování byly trojúhelníky zkoumány v přirozeném světě i světě kultury. Díky tomu měly některé aktivity multikulturní charakter. Zajímavé bylo zkoumání významu trojúhelníků v různých kulturách, zkoumání vlajek a symboliky trojúhelníků na těchto vlajkách.

Závěrem lze říci, že práce v „hlubokém“ moři trojúhelníků byla pro žáky motivující, účastnili se jí se záplem a zaujetím.

Možné úpravy materiálu

Materiál by mohl být dále upraven těmito způsoby:

- zavedení pojmu podobnost,
- rozšíření aktivit o práci se čtyřúhelníky a mnohoúhelníky,
- měření (obvod/obsah),
- konstrukce trojúhelníka na počítači,
- obohacení materiálu o práci s ICT, např. GeoGebrou. Místo tyček žáci pracují s úsečkami v 2D prostoru.