

EINE FABRIK VON DREIECKEN

von Maria Piccione*

EINLEITUNG

Dieser Vorschlag ist mit den grundlegenden Bereichen des geometrischen Wissens verbunden, genau bezieht er sich auf die Modalität der Konzeptualisierung der dreieckigen Form, mit ihren grundlegenden Eigenschaften und Verhältnissen.

Die Form von geometrischen Figuren gehört zum begründenden Kern des mathematischen Denkens und zusammen mit dem Messen von Erweiterungen, ist sie ein charakterisierendes Objekt der Euklidischen Geometrie. Speziell die Form des Dreiecks ist eines der relevantesten offiziellen Themen der Sekundarstufe I, was der Vorschlag hauptsächlich enthält. Die gegenwärtige Arbeit führt die SchülerInnen in einen angemessenen Lernbereich für die Entwicklung von rationalem Denken ein, wie es die mathematische Erkenntnistheorie selbst erkennt, und wie die Disziplin die das Lehren benötigt, in Übereinstimmung mit den Anweisungen der Richtlinien des Ministeriums.



Ziele

Die Bildungsziele des Vorschlages können in kognitive, meta-kognitive und emotionale Ziele unterschieden werden.

* Department of Information Engineering and Mathematics - University of Siena, Italy

Kognitive Ziele:

- Verbessern des Visualisierungsprozesses
- Umsetzung des Mathematisierungsprozesses
- Strukturierung des Konzeptes von Konstante/Variable in einer Klasse von Elementen
- Fördern von kombinatorischem Denken
- Entwickeln von graphischen Repräsentationsfähigkeiten
- Entwickeln von Sprache, von der alltäglichen zur fachlichen
- Konstruieren des Konzeptes der dreieckigen Form
- Finden der Existenzbedingungen („Dreiecksungleichung“) und die einzigartigen Bedingungen für Dreiecke
- Identifizieren der Kriterien der Kongruenz zwischen Dreiecken

Meta-kognitive Ziele:

- Entwickeln des Bewusstseins über die Relation handeln-verstehen
- Entwickeln des Bewusstseins über die Relation wissen-erklären

Emotionale Ziele:

- Einen Sinn von Selbsteffizienz bilden
- Freude am handeln/beobachten/entdecken wecken.

Methodische Rahmenbedingungen:

Die Euklidische Geometrie spielt eine essenzielle Rolle in der Entwicklung von wissenschaftlichem Denken und ist aus zwei essenziellen Gründen ein zentraler Bereich im wissenschaftlichen Lehren:

- Sie ist ein theoretisches System, das reale Situationen durch spontan wahrnehmbare sensomotorische menschliche Erfahrungen repräsentiert.
- Sie bietet ein natürliches Training der Demonstrativen Methode.

Geometrische Bildung muss sich auf Beziehung von *Subjekt-reeller Raum* und *Subjekt-konkrete Objekte* beziehen und diese hervorheben, im speziellen den Beginn des mittleren Bildungslevels zu formen. Punkte, Segmente, Dreiecke und andere Wesenheiten – mit welchen sich die Disziplin beschäftigt – sind keine konkreten Objekte, aber Einheiten die durch Zeichnungen konstruierbar oder logische Strukturen korrekt repräsentierbar sind. Eine methodische Perspektive, basierend auf Realitäts-Interaktion gibt eine effiziente Grundlage für die intuitive Phase des kognitiven Prozesses und theoretischer Anwendungen.

Gegenwärtig erlauben die Entwicklungen der Neurowissenschaften und der Kognitivistik, „geometrische Intelligenz“ von menschlichen Lebewesen

als Kodierungsnetzwerk und entsprechenden Repräsentationen, die während ihrer Handlungen in der realen Welt erworben wurden, interpretiert.

Außerdem beeinflusst der *Enaktivismus*¹, eine allgemeine Theorie des Wissens, verbunden mit der Biologie und Philosophie der Erfahrung, die Bildung durch die Definition des *aufgeführten Modells*, in Übereinstimmung mit dessen Inhalten mit anderen gemeinsamen Methodologien/Theorien (wie *manipulativer Gebrauch*, *verkörperte Erkenntnis*, *kooperatives Lernen*...) Das theoretische Prinzip kann wie folgt zusammengefasst werden:

Das Subjekt ist ein lebendiges Wesen, das zu selbsterzeugenden Komponenten (Prozessen), welche im Lebewesen verkörpert werden und welche von der Beziehung zwischen dem externen Umfeld und der internen Struktur des Individuums, unabhängig von ihrem tatsächlichen Zustand festgelegt werden, fähig ist.

Der aufgeführte Zugang fokussiert auf *Sinn-machen als situierte, verkörperte Handlung*. Castelnovo's active Lernmethode ist übereinstimmend mit diesen aktuellen Rahmenbedingungen und wurde in diesen Vorschlag aufgenommen, mit Teilen seiner konkreten Materialien und Gebrauchsmethoden.

Das Design des Vorschlags

Der Lernkontext ist auf die Verwendung von dynamischen Modellen zentriert, welche von den Elementen eines einfachen Materials: einer „geometrischen Meccano“ – bestehend aus Stäben verschiedener Farben und Längen (aus Plastik, Holz oder Metall), die Löcher an ihren Enden oder Löcher in gleichmäßig Abständen an deren Längen – Haken und Fäden, erschaffen werden.



Es wäre besser den SchülerInnen zu erlauben, diese Stäbe selbst, mit Hilfe von schriftlichen Anleitungen – die sich auf Quantität und Abmessungen der zu erhaltenden Objekte beziehen – erstmals die Stäbe auf Plastikbögen (oder Karton) zu zeichnen und anschließend auszuschneiden und die Löcher zu machen, zu produzieren

Die Arbeit zielt darauf ab, sensormotorische Erfahrungen des Objektes „Dreieck“ zu bieten und die Sprache zu beherrschen – in schriftlicher oder mündlicher form – beziehend auf die Beschreibung, was von den SchülerInnen getan und gesehen wird.

¹Die Theorie, begann mit dem Beitrag der Biologen Maturana und Varela (1984), wurde ausdrücklich von Varela, Thompson und Rosch (1991) vorgestellt.

Außerdem ermöglicht das Thema eine multikulturelle Sicht über menschliches Wissen und Technologie.

Wie die Tätigkeit durchgeführt wird:

- In Paaren oder in Kleingruppen von SchülerInnen, während des Bildens von flachen dynamischen Figuren, analysieren von Produkten, zeichnen, schreiben von Beobachtungen oder Kommentaren;
- Im Klassenverband für Momente der Diskussion/Vergleich von Resultaten.

Der Vorschlag wird in drei Phasen aufgeteilt: Phase 1, mit ihrer vorstellenden Funktion; Phase 2 und 3 bieten einen natürlichen kognitiven Weg von der Idee einer dreiseitigen Figur zum Konzept des Dreiecks bis hin zu den Kongruenzkriterien. Jede von ihnen ist in geordnete Schritte wie folgt strukturiert.

A PRIORI ANALYSE

Der Vorschlag ist designet, um sich den gegenwärtigen schulischen Probleme in einer multikulturellen Klasse zu stellen, im speziellen:

- Vermehrung der Unterschiede zwischen Individuen (abhängig von der Herkunftskultur, vorhergehenden Bildungssystemen und Schulerfahrungen, Level der Beziehungs- und Kognitiven- Entwicklung, Level des Sprachwissens als L2 ...)
- Formen von Unbehagen (bewiesen durch Verhaltensweisen wie Isolation, Misstrauen oder Gleichgültigkeit gegenüber Schulaktivitäten und Unvermögen von adäquater Konzentration/Teilnahme)

Die grundlegende Idee der Arbeit ist:

- Festlegen eines Umfelds, das Handlungen und individuelle Erfahrungen in einem sozialen Kontext bevorzugt, Bereitstellen von Hilfsmitteln, die dazu fähig sind, verbale Anweisungen zu reduzieren.

Das Bildungsziel beruht auf:

- Allen die Umsetzung kognitiver Prozesse erlauben, auch wenn Sprachschwierigkeiten vorhanden sind
- Die Sprachentwicklung mit Erfahrungen und Beziehungen zwischen Gleichaltrigen verankern.

Die Wahl des Materials und dessen Verwendung zielen exklusiv auf die Unterstützung des Bildungsprozesses von mentalen Bildern ab. Dieser Prozess ist notwendig für die konzeptionelle Repräsentation gemäß der Strukturierungsphase (*Sensomotorische Erfahrung – mentale Bilder – Konzepte*). In Bezug auf *Bild-Schemata* – die wahrnehmenden-konzeptionellen Urbilder erlauben die Organisation von Erfahrungen in räumlichen Beziehungen – Der Großteil der Arbeit appelliert an das *Kontakt* Schema.

Hauptausführung

von Maria Piccione

Dieser Vorschlag wurde in zwei ersten Klassen der Sekundarschule I „Gandhi“ (Florenz) durchgeführt. Es waren jeweils 22 SchülerInnen (6 MigrantInnen und 5 mit Lernschwierigkeiten) und 21 SchülerInnen (7 MigranInnen und 5 mit Lernschwierigkeiten), zwei LehrerInnen (G. Sallustioand A. Scialpi) in Zusammenarbeit mit dem/derTrainerIn involviert.

Es wurde zuerst vom/von derTrainerIn beschrieben und mit den beiden LehrerInnen der Ausführungsklassen diskutiert.

Die Arbeit wurde in drei Phasen durchgeführt.

Phase 1: Vertraut werden mit dem Material (*eineinhalb Stunden*)

Präsentation des „geometrischen Meccano“

Die SchülerInnen der beiden Klassen versammelten sich in einem großen Raum. Da die Handlung mit einem neu strukturierten Material ausgeführt werden sollte, bestand der erste Schritt in dessen Präsentation und Gebrauchsanleitung, sowie in der Bewertung der Kapazitäten der SchülerInnen: Die LehrerInnen zeigten das Material, wie die Stäbe an den Enden mit Haken zusammengesetzt werden, welche Elemente gliederbar sind und verschiedene Figuren, die mit ihnen gebaut werden können.

Erste freie Zusammensetzung

Die Aktivität fand in Kleingruppen von (3-4) SchülerInnen statt, die um passend zusammengestellte Schultische platziert waren.

Jede SchülerInnengruppe wurde mit einem Set von (15-20) Stäben und Haken ausgestattet: Sie kreierten viele Kompositionen, wobei sie drei Stäbe frei wählten und diese verbanden.

Phase 2: Bereitstellen des motivierenden Kontextes (*vier Stunden*)

Arbeit des Denkens/Überdenkens (*30 Minuten*)

Diese Arbeit wurde in der Theaterhalle – die mit einem Projektor und einer Leinwand ausgestattet ist – mit den SchülerInnen im Parkettbereich sitzend durchgeführt.

Zuerst wurde jedem/jeder SchülerIn drei Stäbe und Haken für die Verbindungen gegeben. Sie wurden eingeladen:

- die von ihm/ihr zusammengestellte Figur zu beobachten;
- in seine/ihre Gedanken zu sehen – mit geschlossenen Augen – nach Bildern von dreieckigen Objekten in der realen Welt zu suchen;
- den Namen niederzuschreiben und das ausgedachte Objekt auf Papier zu skizzieren;

Die Lehrperson hob die verschiedenen aufgetauchten Beispiele von zusammengesetzten und ausgedachten Figuren hervor und sammelte die Skizzen ab. (Foto 2).

Kommentierte Projektion (30 Minuten)

Eine umfangreiche Auswahl von Fotos wurde auf die Leinwand projiziert, um allen die Menge an Dreiecken in der realen Welt bewusst zu machen. (Foto 3)

Darauffolgend fanden die Aktivitäten parallel in zwei separierten Klassen statt.



Foto 2



Foto 3

Internetsuche (1 Stunde)

Im Computerraum wurden die SchülerInnen in Kleingruppen geteilt und teilweise vom/von der TrainerIn angeleitet. Sie wurden aufgefordert nach Webseiten im Internet zu suchen, die von Dreiecken handeln; sie bestimmten die Ergebnisse der Suche indem sie die bevorzugten Repräsentationen sammelten.

Ein multikultureller Überblick (1 Stunde)

Der weit verbreitete Gebrauch von „Dreiecksbildung“ in jeder Kultur und Zeit der menschlichen Geschichte, von den frühesten Zeiten zur Gegenwart wurde von der Lehrperson hervorgehoben indem der Fokus auf einigen signifikanten Beispielen lag, die diskutiert wurden:

- Alltägliche Gegenstände (Pfeilspitzen, Werkzeuge,...)
- Erste Bauten (Zelte und Bungalows)
- Architektonische Strukturen (Dachdecktechnologie, Spalierbauten, Netzwerk-Balken,...)
- Maße
- Kartierung (Gebäude, Wohnungen, Städte, Länder,...)
- Arbeiten in Kunst und Architektur zunehmend fortgeschritten

Die Themen, die mit den erfolgreichen Gründen für das Dreieck in Bezug stehen, entstanden auf natürliche Weise; einige davon wurden wie folgt angegeben:

- Steifheit der dreieckigen Struktur

- Möglichkeit jeglichen Punkt im Kartierungsprozess zu fixieren und hervorzuheben
- Ästhetischer Wert

Zwei Experimente (1 Stunde)

Zwei Experimente wurden in Zusammenarbeit mit der Lehrperson der technischen Bildung durchgeführt:

- Eines zielte auf die Überprüfung der Steifheit der dreieckigen Struktur ab. Es wurde das Stauchen realer Modelle gezeigt, auch wenn die Realisierungen nur durch gefaltetes Papier gezeigt wurden.
- Das andere bestand aus der Kartierung des Klassenzimmers, unter Verwendung des Abstandshelfers. Das Zimmer war ungefähr rechteckig und die SchülerInnen konnten die Notwendigkeit des Zeichnens einer diagonalen Linie verstehen und würdigen, um einen Plan zu erhalten. Eine Aufgabe an das vier Stäbe verbundene Verfahren – durch Verwendung der Stäbe – klärte die Situation und hob die einzige mögliche Anordnung durch die Fixierung eines Verbindungsstabes zwischen zwei gegenüberliegenden Eckpunkten.

Phase 3. Konzeptuelle Konstruktion und Sprachentwicklung (drei Stunden)

Die Aktivität wurde in Kleingruppen von (3-4) SchülerInnen organisiert und durch verschiedene Schritte mit steigender Komplexität entwickelt.

Existenzbedingungen des Dreiecks (1 Stunde)

Die Aktivität fuhr mit der Konstruktion eines Dreiecks durch das Verbinden dreier Stäbe fort. Jede SchülerInnengruppe wurde mit zwei verschiedenen Dreiersets von Stäben ausgestattet, in zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen sollten die Teile in Figuren verwandelt werden. Um dies zu realisieren sollte:

1. Das erste Tripel zur Produktion *nur einer* „geschlossenen“ Figur (d.h. einem Dreieck!) führen
2. Das zweite Tripel zu *vielen* „offenen“ Figuren ... (Foto 4)

Graphische Repräsentationen der erhaltenen Figuren in allen Situationen – ein/eine SchülerIn der Gruppe sollte die Rolle des/der „ReporterIn“ übernehmen – erwies sich als nützliches Mittel um die Ergebnisse zu registrieren.

Die Lehrperson beobachtete in jeder Gruppe die spontanen Handlungen der SchülerInnen während ihrer Aktivität: die verbale Kommunikation und verwendete Terminologie (wie „Stab“ oder „Seite“, „offen“, „geschlossen“, „Raum“, „Proportion“, „Summe“, „Länge“,...). Die SchülerInnen jeder Gruppe wurden stufenweise aufgefordert einen Kommentar auf ein Blatt Papier in Relation dazu zu schreiben, was sie sahen. Die Aufgabe war nur „Ich sehe das(s)...“. Die Lehrperson sammelte diese ab, um die resultierenden Schlussfolgerungen zu analysieren.

Danach lenkte der/die LehrerIn die Aufmerksamkeit der SchülerInnen auf die Bedingung für die Konstruktion eines Dreiecks und die Anzahl der Möglichkeiten,

indem das Folgende Problem aufgestellt wurde (von „Stäben und Dreiecken“ adaptiert, 21° RMT, und auf den Namen eines/einer SchülerIn hingewiesen):

<Ibrahim legt fünf Stäbe von verschiedener Länge auf seinen Tisch: 4 Einheiten, 5 Einheiten, 6 Einheiten, 9 Einheiten, 11 Einheiten. Wie viele verschiedene Dreiecke kann er bauen? Erkläre alle Möglichkeiten.>

Dreieckskonstruktion mit einem gegebenen Element (Seite/Winkel) (1 Stunde)

Nachdem den SchülerInnen vorgeschlagen worden war Stäbe, Fäden oder Elastische Bänder zu verwenden, um Dreiecke herzustellen, stellte die Lehrperson Arbeitszeit zur Verfügung. Danach wurde eine Diskussion innerhalb der Gruppen mit der folgenden Frage gestartet:

- *Welche Elemente seht ihr, die sich bei Bewegung verändern könnten?*

Er ermutigte Kommentare unter SchülerInnen während einer Zusammenfassung.

Dreieckskonstruktion mit zwei gegebenen Elementen (Seite & Winkel / Seite & Seite / Winkel & Winkel) (1 Stunde)

Während dieser Stunde forderte die Lehrperson die SchülerInnen auf das Material auf einer Seite und einem Winkel zu fixieren und Fäden zu verwenden, um eine Seite zu erweitern und das Dreieck zu schließen. Sie sollten bauen, beobachten und graphische Reproduktionen der erhaltenen Figuren in verschiedenen möglichen Konfigurationen Anfertigen. (Foto 5)

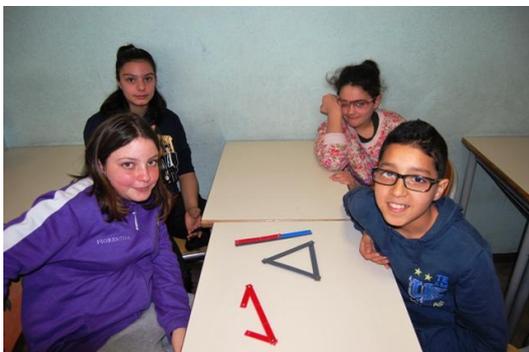


Foto 4



Foto 5

Eine problematische Situation wurde durch die folgenden zwei Fragen geschaffen:

- *Ändert sich etwas, wenn wir einen anderen Winkel annehmen?*
- *Ändert sich etwas, wenn wir eine andere Seite annehmen?*

Wie oben angesprochen, wurden Kommentare gesammelt und geordnet.

Definitionen

Nach dieser Aktivität wurden die SchülerInnen mit einer strikten verbalen Beschreibung einiger seltsamer dreieckiger Formen beschäftigt. Sie sollten die zugehörige fachliche Terminologie teilen (wie gleichschenkliges, rechtwinkliges, gleichseitiges und ungleichseitiges Dreieck). Außerdem wurden SchülerInnen dazu aufgefordert sich nochmals Dreiecke, die zu den benannten Klassen gehören

auszudenken und die möglichen Unterschiede zwischen den Elementen jeder Klasse zu beschreiben.

Problemlösen

Die Problemlösungsphase wurde eingebaut um Fähigkeiten im Identifizieren von Dreiecken zu überprüfen. (siehe Anhang für die Aufgaben)

A POSTERIORI ANALYSE

Einige Resultate können von der Aktivität abgeleitet werden; wir werden uns auf die relevantesten fokussieren, die zeigen ob und wie der realisierte Vorschlag die Ziele erreicht.

- Beweis der Potentiale des „geometrischen Meccano“, innerhalb des Mathematisierungsprozesses

Diese Anwendung hat gezeigt, dass die Verwendung dieses Materials – in einem sozial geteilten Kontext – die individuelle interne Rekonstruktion externer Operationen bevorzugt. Wir werden nur die Rolle des Materials bei der Entdeckung der „Dreiecksungleichung“ diskutieren. Der Stab hat sich als *Artefakt*, das sich in das Konzept eines „Teilstücks“, das vom linguistischen *Zeichen* „Seite“ repräsentiert wird entwickeln kann, erwiesen. Wir konnten beobachten, dass während der Übung, die drei Stäbe nicht dieselbe Rolle spielen. Die SchülerInnen tendierten zuerst dazu den Stab mit den fixierten Enden zu beachten – sie nannten ihn „Basis“ – und so beachten sie die anderen zwei Stäbe, welche noch einen Grad von Freiheit haben. Dieses Verfahren veranlasst SchülerInnen eine natürliche Klassifizierung von Seiten in zwei verschiedene Typen zu entwickeln: die erste Gruppe bezieht sich auf fixierte Elemente und die zweite auf das, was als „Rückstände“ bezeichnet wird. Die Rolle der „Rückstände“ schien fundamental, da es die Anerkennung der Existenz einer Beziehung zwischen den Elementen, auf denen die Verfügbarkeit „die Figur zu schließen“ entscheidend abhängt, erlaubte. Die folgenden Kommentare wurden der Analyse der Protokolle aus Phase 2 entnommen, im speziellen die Beantwortung der effektiven Frage: „Ich sehe das(s)...“. Wir konnten beobachten, dass diese Realisation einen spontanen kognitiven Prozess beinhaltet, der durch die verwendeten Wörter der SchülerInnen – wie „kurz/mittel/lang“, „proportional/unproportional“, „verschieden/gleich“ – verfolgt werden kann, und als Konsequenz bei Ausdrücken die sich auf Vergleiche auf Basis einer metrischen Interpretation beziehen. Die fundamentalen Schritte dieses Prozesses schienen auf zwei speziellen Fällen zu beruhen: die gleichseitiger und ausgearteter Dreiecke. Der erste Fall wird durch Sätze wie „*es schließt sich, da die Seiten gleich sind*“ charakterisiert. Der zweite Fall – der unerwartete – zeigt eine mächtige Funktion, da er die SchülerInnen zur Mathematisierung der Schließbedingungen in Bedingungen wie „Länge“ und „Summe der Längen“ führt. Tatsächlich wird in diesem Fall die Summe der Länge zweier Stäbe als gleich zum dritten empfunden, was in Sätzen wie: „*die beiden restlichen Seiten sind komplementär zur Ersten*“, oder „*zwei Seiten ergeben die Länge der Längsten*“ ausgedrückt wird. Der folgende Schritt besteht aus dem

angeben der Relation der Dreiecksungleichung: „*die Figur schließt sich, wenn zwei Seiten länger als die dritte sind*“.

- Instrumente für die Identifikation von logischen/geometrischen Kompetenzen

Zum Beispiel:

1. Die Unfähigkeit die beiden vorhergehenden Konfigurationen im Sinne von Quantoren zu unterscheiden: wenn sich die Figur schließt, sind *alle* Seiten kürzer, als die Summe der anderen beiden / wenn sich die Figur nicht schließt, *existiert nur eine Seite*, die länger als die Summe der beiden anderen ist.
2. Die Unfähigkeit die zugehörigen Kongruenzkriterien von der Möglichkeit ein einzigartiges Dreieck zu konstruieren, abzuleiten – unter einigen.

Die Probleme beziehen sich auf ein Defizit der Visualisierung und Sprachfähigkeiten (1), sowie die Schwierigkeit die Vergleichende Eigenschaft der Gleichheit zu meistern (2).

- Instrumente für die Evaluation von kognitiven Diskrepanzen unter SchülerInnen innerhalb der Klasse.

Die Arbeit resultierte als hilfreich, um die abweichenden Level von Kompetenzen unter den am Projekt teilnehmenden SchülerInnen zu überprüfen und angemessene zukünftige Bildungshandlungen zu planen. Beispiele für zwei Grenzfälle sind:

1. Die Unfähigkeit eine bestimmte Anordnung von Stäben graphisch darzustellen (das Subjekt schaffte die Reproduktion nur durch die Bewegung des Zeigefingers, geordnet an jedem Stab).
 2. Die Fähigkeit eine perfekte Beschreibung eines Verfahrens zu erstellen, um die Anzahl aller möglichen Dreiecke im Problem „Stäbe und Dreiecke“ zu berechnen (beobachten, dass im durchgedachten Fall, dieselbe Figur dreimal auftauchte).
- Angemessenheit des Vorschlages, den typischen Problemen in einer multikulturellen Klasse gegenüberzutreten.

Durch die Flexibilität und Anpassung an die Befähigungen jedes Subjekts, zeigte sich die Methode geeignet um die Unstimmigkeiten, die auf fehlender kognitiver/gesellschaftlicher Homogenität und dem Gebrauch von Italienisch als L2 beruhen anzufassen. Jeder/jede SchülerIn nahm an der Aktivität wenigstens durch Berühren und sehen realer Objekte teil.

- Sprachentwicklung

Die Arbeit bestätigt, dass Sprachentwicklung, basierend auf effektivem Bewusstsein, gut gefördert wird, wenn SchülerInnen auf direkte Art agieren, während in einer Gleichaltrigenbeziehung interagieren und Ideen teilen, verglichen zum Fall, wenn sie nur durch einfaches Zuhören von der Lehrperson und bezugnehmend auf statische Figuren lernen. Dies wurde zum Teil in der vorherigen Analyse argumentiert. Zusätzlich ist es notwendig, die Ordnung der Gedanken, zusammen mit ihrer

verbalen Erklärung zu beobachten, die durch die hauptsächlichen Schwierigkeiten gezeigt wurden, die während der Ausführungsorganisation entstanden sind, und nicht auf ausländische SchülerInnen beschränkt war. Die Transformation einer konkreten Figur – durch dessen Handhabung – bringen die SchülerInnen dazu zu *sagen/versuchen zu sagen was er/sie macht* und so dem Erlernen der Sprache hilft und es durch die Lächer schafft (Gegenwärtigkeit/Abwesenheit von Wörtern, angemessener/unangemessener Gebrauch, unklarer/exakter Gebrauch,...)

- Einfluss auf individuelle emotionale Komponenten

Die SchülerInnen waren fasziniert von den Aktivitäten, fühlten und zeigten

- Neugier und Vergnügen beim Konstruieren der Figuren mit dem Gebrauch der Stäbe
- Freude beim Arbeiten in Kleingruppen
- Interesse was sie konkret sehen und entdecken konnten
- Interesse beim Erkennen der Beziehungen zwischen der realen und geometrischen Welt.

Sie alle genossen die Arbeit und konnten ihre Aufmerksamkeit für lange Zeitspannen der Anwendung aufrecht halten. Der auffälligste Fall bezieht sich auf ein chinesisches Mädchen, das sich zuvor geweigert hatte an jeglicher Schulaktivität teilzunehmen und die nun aktiv wurde.

- Auswirkung auf die LehrerInnenbildung

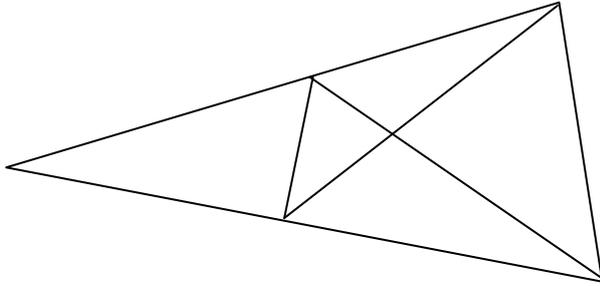
Aus dem Blickpunkt der LehrerInnenbildung, hatte die Ausführung dieser Aktivität einen guten Einfluss: Im Moment sind vier LehrerInnen an der Schule, die den Willen teilen, mathematische Inhalte zu überarbeiten und das Lehren dieser zu erneuern. Ein Klassenzimmer – mit Hilfsmittel und Materialien ausgestattet und für Gruppenarbeiten vorbereitet – wurde den Mathematikstunden zugeordnet, was dem aktiven Lern/Lehr-Zugang Bedeutung gibt.

ANHANG

Probleme

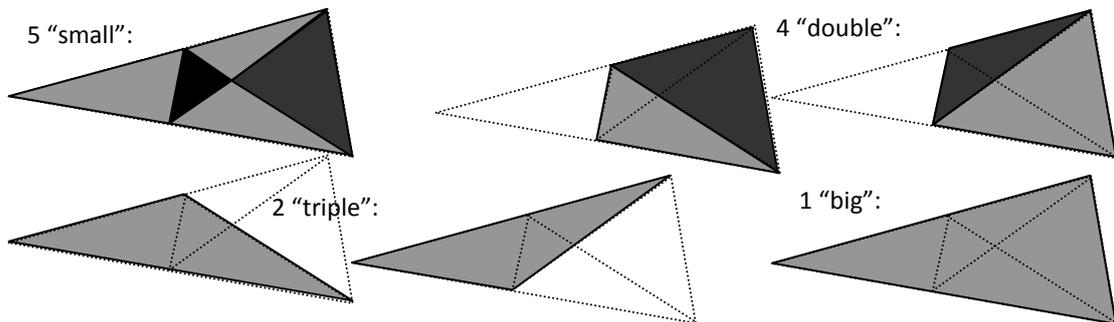
- „Gut versteckt“ (Frage in 21° RMT)

Wie viele verschiedene Dreiecke kannst du in dieser Figur sehen?



Beteiligte Prozesse: Visualisierung, Erkennen und zählen

Lösung

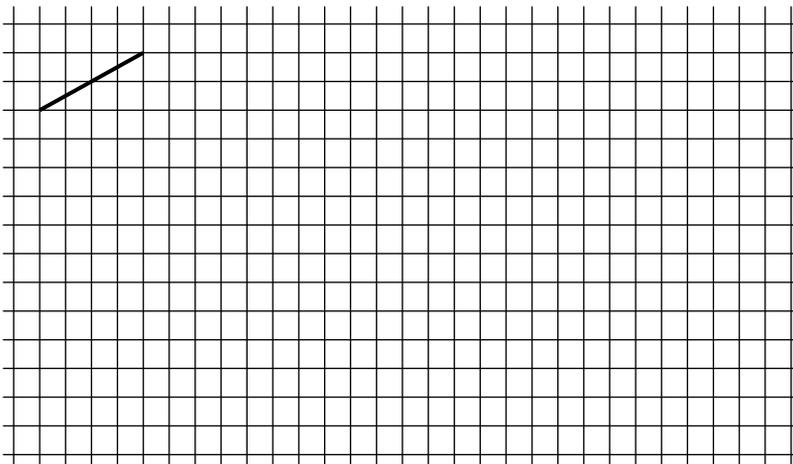


- „Dreiecksausschnitte“ (Frage in 19° RMT)

Finde verschiedene Dreiecke (d.h. nicht überschneidend auf diesem karierten Papier). Folge diesen beiden Anleitungen:

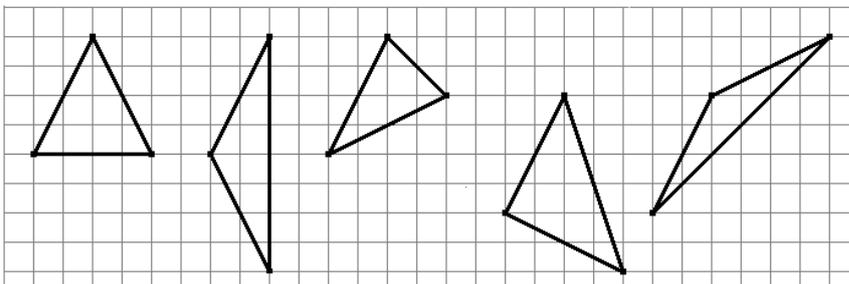
- Sie müssen zwei Seite mit derselben Länge wie das gezeichnete Segment auf dem Karierten unten haben.
- Sie müssen ihre Scheitel in den Schnittpunkten der Quadrate haben

Wie viele Dreiecke kannst du finden? Zeichne diese und schneide sie aus.



Beteiligte Prozesse: Form- und Maßidentifikation, Deduktion

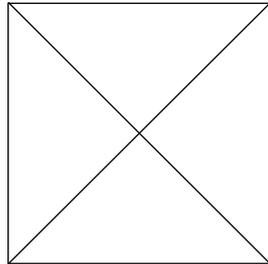
Lösung



- **„Die komponierte Figur“**

Eine Figur wurde auf dieses Papier gezeichnet. Wie viele verschieden geformte Dreiecke kannst du darin erkennen? Kannst du die gefundene Form beschreiben?

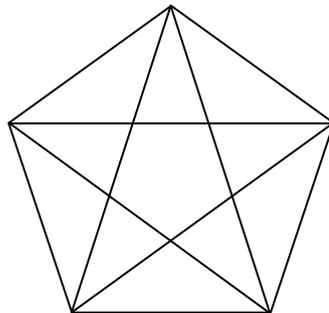
(a)



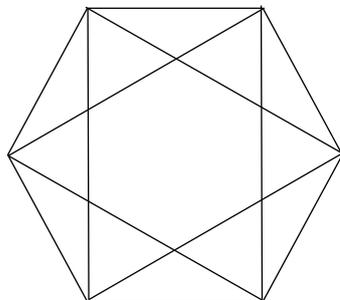
Beteiligte Prozesse: Formanalyse und Klassifizierung

Zwei schwierigere Versionen des Problems

(b)



(c)



- **„Ein Bodenbelag aus Dreiecken“**

Entwerfe einen gefliesten Boden mit Dreiecken, nach deinen Vorlieben

Beteiligte Prozesse: Formanalyse und Kombination

Zweite Ausführung

von H. Moraova**

Ausführung / Siena – Dreiecke

Prag, 27.05.2014, 4 anschließende Stunden, 7.Schulstufe, CLIL

1. Aktivität eins (wir hatten kein Konstruktionsset), den SchülerInnen wurden Holzspieße gegeben und sie wurden aufgefordert daraus Stäbe von 4, 5, 6, 9 und 11 cm Länge zu fertigen. Danach wurden sie aufgefordert so viele Dreiecke wie möglich damit zu legen – Entdecken /Wiederholung des Konzepts der Dreiecksungleichung. (Foto 1)
2. Blatt 1 – siehe Anhang, individuelle Arbeit
3. Formulierung der Dreiecksungleichung in Englisch
4. Winkel im Dreieck / Summe der inneren Winkel, Größen der Innenwinkel, Seitenlängen und Winkel (Blatt 1 unten) (Foto 2)

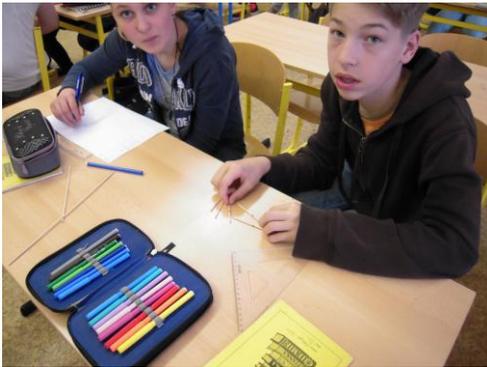


Photo 1



Photo 2

5. Terminologie – gleichseitig; gleichschenkelig; stumpfer, spitzer, rechter (Winkel)
 - a. Klassifizierung von Dreiecken in Bildern
 - b. Ausschneiden verschiedener Dreiecke von bunten Papierblättern und benennen dieser



Photo 3



Photo 4

** Charles Universität Prag, Tschechische Republik



Photo 5

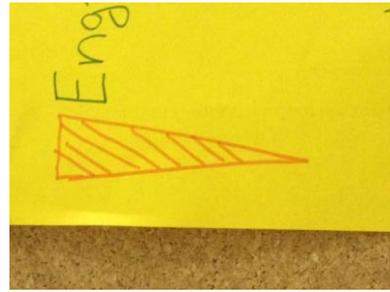


Photo 6

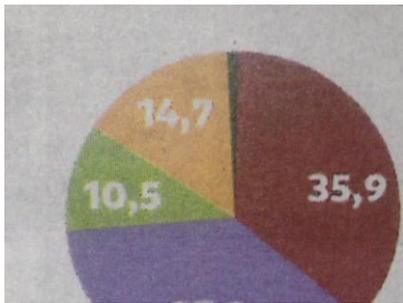
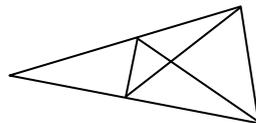


Photo 7



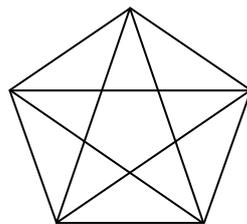
Photo 8

6. Dreiecke in der Architetkur.
7. Dreiecke um uns, verwenden von Mobiltelefonen um Bilder von dreieckigen Objekten aufzunehmen, die sie im Schulhaus finden können.

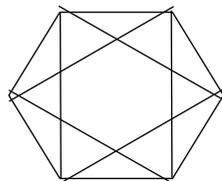


8. Design eines gefliesten Bodenbelags mit Dreiecken.

(a)



(b)



9. Fünfzackiger Stern und Sechszackiger Stern, Hexagramm, Davidstern, Flaggen, Bedeutung in Kulturen, wie werden sie entworfen, konstruiert, gefaltet

Dritte Ausführung

von M.-H. Le Yaouanq^{***} und B. Marin^{***}

EINLEITUNG

Die dritte Ausführung wurde von Herrn Paulou, einem Mathematiklehrer der Sekundarstufe I, der Roger Martin du Gard Schule, die in einem Bildungsschwerpunktbereich liegt (auf Französisch: ZEP «Zone d'Éducation Prioritaire»), mit einer 7. Schulstufe durchgeführt.

Die Begriffe, die dem Dreieck im Lehrplan der 7. Schulstufe zugeordnet werden sind die Dreiecksungleichung und die Dreiecksfläche. Fälle von gleichen Dreiecken kommen im Lehrplan nicht vor. Jedoch ermutigen wir die SchülerInnen, bei der Dreieckskonstruktion zu beobachten, dass wenn eine Seite des Dreiecks gezeichnet wurde, etliche Dreiecke konstruiert werden können, symmetrisch in Zweiergruppen in Relation zu dieser Seite, in Relation zum Bisektionsverfahren oder der Mitte dieser Seite.

Die Unterrichtseinheit wurde in zwei Phasen geteilt:

PHASE 1: DREIECKSUNGLEICHUNG

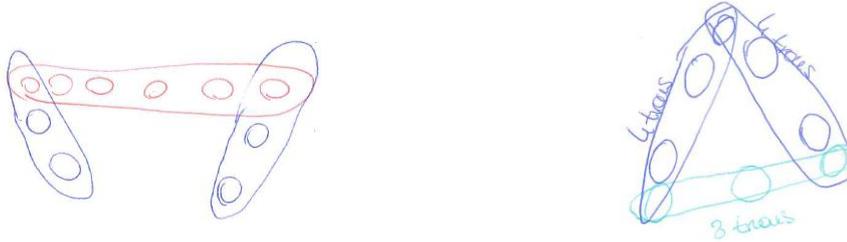
Die Erforschungsstunde besteht aus drei Schritten.

Eine Aktionsphase, basierend auf einem Spiel «Meccano», in welchem Plastikstäbe mit verschiedenen Längen mit Bolzen zusammengehalten werden (Siehe Bild 7 und 8). Die SchülerInnen arbeiten in Gruppen. Stäbe mit verschiedenen Längen werden ausgeteilt und die SchülerInnen sollen versuchen so viele verschiedene Dreiecke wie mögliche zu bauen.



^{***} UPEC Universität, ESPE, Créteil (Frankreich).

Für eine Bilanz ihrer Versuche sollen sie die verschiedenen, erlangten Ergebnisse auf ein Blatt Papier zeichnen.



Danach wird eine Sammelphase durchgeführt um ein Inventar der Dreiecke, die gebaut oder nicht gebaut werden können zu erhalten. Danach stellt die Lehrperson ein Spiel vor: Die SchülerInnen müssen erraten, ob jemand ein Dreieck mit den vorgegebenen Längen bauen kann oder nicht. Die Lehrperson greift nur regulierend ein, die SchülerInnen müssen verbal diskutieren. Diese Phase zeigt, wie schwer es für die SchülerInnen ist, eine exakte Formulierung, die von „Abstand nicht zu groß“, „geschlossene Längen“, usw. abweicht zu finden (Margolinas, 2010)

Andererseits kann beobachtet werden, dass am Ende der Stunde, alle SchülerInnen durch die Aktivität befähigt wurden eine Methode zu entwickeln, die ihnen erlaubte zu entscheiden ob ein Dreieck mit gegebenen Längen konstruiert werden konnte oder nicht.

Die folgenden Stunden werden dafür aufgewandt werden, Eigenschaften zu formulieren und diese wiederzuverwenden um ihre Existenz zu zeigen und den Unterschied der möglichen Dreiecke während der Konstruktion mit Hilfsmitteln und ihre Gleichheit, basierend auf den Dreiecken, die mit Meccano gebaut wurden zu zeigen.

Wir bemerken, dass SchülerInnen oft Schwierigkeiten begegneten, mit dem Fall des abgeflachten Dreiecks während der Konstruktion mit Lineal und Zirkel (mit Zeichnungen von nicht abgeflachten Dreiecken mit den Seitenlängen 4, 5, 9), welche während der Aktivität nicht auftauchten, da die Handhabung direkt zur Überlagerung der Stäbe führte.

PHASE 2: Die SchülerInnen sollten eine Forschungsphase über Länderflaggen, in denen ein Dreieck vorkommt durchführen. Sie mussten eine auswählen und diese aus einem geometrischen Blickwinkel beschreiben, diese darstellen und nach der Bedeutung der verschiedenen Flaggenelemente in Relation zum repräsentierten Land suchen (Formen, Farben).

Diese Arbeit musste Paarweise außerhalb der Schule durchgeführt, dann aufgeschrieben und in der Klasse präsentiert werden. Die SchülerInnen trugen zu dieser Arbeit mit Enthusiasmus bei und gaben sehr sorgfältige Produktionen zurück.

Diese Arbeit wurde mit Flächenkalkulationen in Bezug zur Dreiecksfläche und dem Ausdruck von Proportion mit Prozenten komplettiert. Viele mögliche Einleitungen

wie schreiben eines Konstruktionsprogrammes, oder fächerübergreifende Arbeit tauchte während dieser Phase auf.

Literatur

Margolinas, 2010, Un point de vue didactique sur la place du langagier dans les pratiques d'enseignement des mathématiques

<https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-00470238/document> (Letzter Zugriff: 1. Mai, 2015)

Schlussfolgerungen aus den drei Ausführungen

von Maria Piccione

Das gesamte Experiment kombiniert zwei Komponenten, betreffend auf das *was* und *wie* ein bestimmtes Thema in einer multikulturellen Klasse ausgeführt werden kann: ein Unterrichtsmodell einerseits und ein Set praktischer Vorschläge andererseits. Die erhaltenen Resultate ermutigen uns diese Arbeit fortzuführen.

Einige Arbeitsentscheidungen und Verhaltensweisen von SchülerInnen aus den Ausführungen sollen wegen ihres mathematischen Werts und positiven Rückmeldungen hervorgehoben werden.

In der zweiten Ausführung wurde das Material aus einfachen Holzspießen hergestellt: so erlaubt es den SchülerInnen eine Sensorische Erfahrung der Dreiecksstrukturen, die Basis für die nächste Aktivität der Dreiecksungleichung zu erfahren. Außerdem wurde das experimentelle Training durch Aktivitäten wie schneiden/falten von Papier, entwerfen von – sogar komplexen – „dreieckiger“ Figuren und gefliesten Böden unterstützt. Die Arbeit gibt ein Beispiel, wie höhere Level einer Anwendung, die die Konzepte von linearer Länge und Winkelamplitude betrifft, erreicht werden können. Der Weg kann über die Fragen in den Arbeitsblättern verfolgt werden: Sie benötigen vergleichende Operationen und Relationen zwischen linearen Längen und Winkelamplituden, sowie das Konzept der variierenden Werte von Längen.

In der dritten Ausführung wurde das originale Meccano verwendet. In diesem Fall finden wir eine weitere explizite Referenz über den Effekt von physischer Aktivität für das Erkennen der konstruktiven Elemente des Modells und ihrer möglichen Bewegungen und Anordnungen. In Übereinstimmung mit den Resultaten der anderen Studien, zeigt das Material besseres Potential als das Lineal-und-Zirkel-Modell, für das Verstehen von geometrischen Eigenschaften, wie der Dreiecksungleichung. Diese Belege können erklärt werden, wenn man Wahrnehmungen wie fühlen und sehen in einem dreidimensionalen Umfeld beachtet. Dieser Vorteil vermisst klar einen Kontext, wo Figuren bereits gezeichnet wurden, wie es der traditionelle Unterricht besagt.

Von dieser Ausführung entstanden auch nützliche und kontextuelle Vorschläge: die abstandsgleichen Löcher, die der Länge der Meccano-Teile folgen, scheinen die SchülerInnen dazu anzuregen „schließen des Dreiecks“ in Bezug auf die Anzahl der

Löcher (als eine Art des Messens) auszudrücken (Foto 2). Zudem, was die Visualisierung betrifft, wird ein interessantes Detail durch die Entdeckung der *Symmetrie* in der Verteilung der Dreiecke unter der Bedingung „eine fixe Seite“ in Hinsicht auf sich selbst realisierbar. Einige Schritte zur Messung wurden durch Flächenberechnungen und Teilflächenberechnungen geführt.

In allen Durchführungen war die Erforschung von dreieckigen Darstellungen in der unmittelbaren Umgebung der natürlichen und kulturellen Welt Anlass für multikulturelle Diskussion. Im speziellen die Erklärung der Bedeutung von Dreiecken in Kulturen und die Recherche über Länderflaggen – in denen ein Dreieck vorkommt – verdienen es hervorgehoben zu werden.

Fazit, beim erforschen des „großen weiten Meeres“ von Dreiecken, abseits des Weges, Teilnahme und vorsichtige Inszenierung können wir sagen, dass Interesse und sogar Enthusiasmus erregt wurden.

Weitere Entwicklung des Vorschlags

Wir können einige Beispiele für die natürlichen Entwicklungslinien des Vorschlags geben:

- Vorstellen der Ähnlichkeitsbedingungen und Annäherung an geometrische Konzepte von Form, unterscheiden dessen „Geschlechts-Sinn“ und „Spezies-Sinn“
- Erweitern der Studie zu Vierecken und anderen Polygonen Klassen
- Ausweiten auf Messungsfragen (Umfang/Fläche)
- Konstruktions-Schreibprogramm

Weiterführen des Vorschlages durch die Verwendung von Software wie GeoGebra, wo „Stäbe“ zu „Strecken“ in einem zweidimensionalen Raum werden.