

ΕΝΑ ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟ ΑΠΟ ΤΡΙΓΩΝΑ

από τη Maria Piccione*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πρόταση αφορά σε ένα από τα βασικά θέματα γεωμετρικής γνώσης. Συγκεκριμένα αναφέρεται στον τρόπο σύλληψης του τριγώνου ως σχήμα, με τις βασικές του ιδιότητες και σχέσεις.

Η μορφή των γεωμετρικών σχημάτων είναι στην καρδιά της θεμελίωσης της μαθηματικής σκέψης και, μαζί με τη μέτρηση των χωρικών σχέσεων, είναι κεντρικό αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ειδικά το τρίγωνο ως σχήμα είναι ένα από τα πιο σημαντικά κομμάτια της ύλης στο Γυμνάσιο και αποτελεί την εστίαση αυτής της διδακτικής πρότασης. Εισάγει τους μαθητές σε ένα κατάλληλο πεδίο μελέτης για την ανάπτυξη της λογικής σκέψης, όπως αναγνωρίζεται από την επιστημολογία των Μαθηματικών, και όπως απαιτεί και η διδασκαλία του αντικειμένου, σύμφωνα με τις επιταγές του Υπουργείου Παιδείας.



Στόχοι

Οι εκπαιδευτικοί στόχοι της πρότασης μπορούν να διαχωριστούν σε: γνωστικούς, μεταγνωστικούς και συναισθηματικούς.

Γνωστικοί στόχοι:

* Τμήμα Πληροφορικής, Μηχανικής και Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο της Σιέννα, Ιταλία

- Βελτίωση της διαδικασίας οπτικοποίησης
- Εφαρμογή της διαδικασίας μαθηματικοποίησης
- Δόμηση της έννοιας της συνέχειας/μεταβλητότητας σε μια κατηγορία στοιχείων
- Προώθηση της συνδυαστικής σκέψης
- Ανάπτυξη της ικανότητας γραφικής απεικόνισης
- Ανάπτυξη της γλώσσας, από καθημερινή σε επιστημονική
- Δόμηση της έννοιας του τριγώνου
- Εύρεση της συνθήκης ύπαρξης (“τριγωνική ανισότητα”) και μοναδικότητας για τα τρίγωνα
- Αναγνώριση των κριτηρίων ισότητας στα τρίγωνα

Μεταγνωστικοί στόχοι:

- Ανάπτυξη επίγνωσης της σχέσης μεταξύ δράσης-κατανόησης
- Ανάπτυξη επίγνωσης της σχέσης μεταξύ γνώσης-εξήγησης

Συναισθηματικοί στόχοι:

- Δημιουργία αίσθησης αυτοαποτελεσματικότητας.
- Άντληση ευχαρίστησης από την πράξη/παρατήρηση/ανακάλυψη.

Μεθοδολογικό πλαίσιο

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της επιστημονικής σκέψης και έτσι έχει κεντρική θέση στην διδασκαλία των επιστημών για δυο βασικούς λόγους:

- είναι ένα θεωρητικό σύστημα που αντιπροσωπεύει πραγματικές καταστάσεις, που μπορούμε να τις συλλάβουμε αυθόρμητα με αισθητηριοκινητικές εμπειρίες,
- δίνει ευκαιρία για φυσική εξάσκηση της δεικτικής μεθόδου.

Η γεωμετρική εκπαίδευση πρέπει να αναφέρεται και να δίνει έμφαση στις σχέσεις *υποκειμένου-αληθινού χώρου* και *υποκειμένου-συγκεκριμένου αντικειμένου*, ειδικά από το αρχικό μέχρι το μεσαίο εκπαιδευτικό επίπεδο. Για να τονίσουμε αυτή την άποψη, μπορούμε να αναφερθούμε στη ρήση του Freudenthal “Η Γεωμετρία είναι το να καταλαμβάνεις χώρο” ή σύμφωνα με τον Poincaré “*un être immobile n’aurait jamais pu acquérir la notion d’espace*”¹, ανάμεσα στους διάφορους επιστήμονες και ψυχοπαιδαγωγούς όπως οι Enriques, Weyl, Piaget που αναφέρθηκαν στο θέμα. Τα σημεία, τα τμήματα, τα τρίγωνα και άλλες οντότητες – με τις οποίες ασχολείται η

¹ H. Poincaré, *La Science et l’Hypothèse*, Paris: Flammarion, 1902, σελ. 78

επιστήμη αυτή- δεν είναι απτά αντικείμενα, αλλά οντότητες συγκεκριμένα αντιπροσωπεύσιμες ή κατασκευάσιμες από σχέδια ή λογικά δομημένα υλικά. Μια μεθοδολογική οπτική βασισμένη στην πραγματικότητα-αλληλεπίδραση μας δίνει μια αποτελεσματική βάση για το διαισθητικό στάδιο των γνωστικών διαδικασιών και των θεωρητικών εφαρμογών. Οι μαθητές οδηγούνται στην ολοκλήρωση μιας διπλής διαδρομής: αυτή “από πάνω προς τα κάτω”, από την πραγματικότητα στο αφηρημένο “μοντέλο” της, του οποίου τα αντικείμενα μπορούμε να τα αντιμετωπίσουμε με αυστηρό τρόπο, και αυτήν του “από πάνω προς τα κάτω” σε σχέση με την πραγματικότητα, που παρέχει τα μέσα για την ερμηνεία και την περιγραφή της. Με αυτή την αμφιταλαντευόμενη δυναμική, είναι βασικό να διατηρήσουμε τις παρανοήσεις, προσέχοντας να μην μπερδέψουμε τους δυο διαφορετικούς κόσμους. Από τη δεκαετία του '60 αυτή η επικρατούσα τάση στη Γεωμετρική εκπαίδευση ακολουθήθηκε πολύ στις Αγγλοσαξονικές χώρες, σε αντίθεση με τη Γαλλία που ήταν υπό την επιρροή της μεθόδου των Μπουρμπακί (ειδικά σε επίπεδο Γυμνασίου). Στην Ιταλία συνεχιζόταν η κλασσική εκπαίδευση, σμίγοντας με τα χρόνια με πειραματικές προσεγγίσεις/ευρετικές πρακτικές, συχνά χωρίς μια ξεκάθαρη διάκριση μεταξύ των δυο προσεγγίσεων.

Επιπροσθέτως, το αποτύπωμα που προκύπτει, το οποίο αποκαλύπτει μια μη-μινιμαλιστική μάθηση που αναφέρεται σε στατικά σχήματα και η οποία εισάγει τύπους για τον υπολογισμό των αναπτυγμάτων, είναι συχνή στα τωρινά σχολικά εγχειρίδια. Ένα πολύ ωραίο παράδειγμα από αυτή την καλά καθορισμένη μέθοδο δίνεται από το έργο της E. Castelnuovo, το οποίο, αρχίζοντας από το καινοτόμο βιβλίο της “Geometria intuitiva” (1948), κατά κάποιο τρόπο συγκεντρώνει και επεκτείνει την κληρονομιά της Montessori. Προς το παρόν, η πρόοδος στις νευροεπιστήμες και στις γνωστικές επιστήμες μας επιτρέπει να ερμηνεύουμε τη “γεωμετρική εξυπνάδα” των ανθρωπίνων όντων ως δίκτυο κωδικοποίησης και αναλογικών απεικονίσεων που αποκτώνται μέσα από τις πράξεις τους στον πραγματικό κόσμο. Αυτό δίνει επιστημονική αξία σε αυτές τις διατυπώσεις που ήταν ακόμη διαισθητικές, παρόλο που είχαν αποδειχθεί πειραματικά.

Επιπλέον, η *αυτοποίηση (enactivism)*², η γενική θεωρία της γνώσης που συνδέεται με τη βιολογία και τις εμπειρικές φιλοσοφίες, επηρεάζει την εκπαίδευση ορίζοντας το *εκτελεσμένο (enacted)* μοντέλο, σύμφωνα με τις ενσωματώσεις του σε άλλες εδραιωμένες μεθοδολογίες/θεωρίες (όπως η χειραγωγούμενη χρήση, η ενσωματωμένη γνώση, η συνεργατική μάθηση...). Μπορούμε να συνοψίσουμε την θεωρητική αρχή της ως εξής: το υποκείμενο είναι ένα ζωντανό ον που μπορεί να αυτο-παράγει συστατικά (διαδικασίες), τα οποία ενσωματώνονται στο ζωντανό ον και τα οποία καθορίζονται από τη σχέση μεταξύ του εξωτερικού περιβάλλοντος και των εσωτερικών ατομικών δομών, ανεξάρτητα από την πραγματική τους κατάσταση.

² Η θεωρία, αρχίζοντας με τη συνεισφορά των βιολόγων Maturana και Varela (1984), εισάγεται ρητά από τους Varela, Thompson και Rosch (1991).

Η προσέγγιση αυτή επικεντρώνεται στην κατασκευή νοήματος ως μιας παισιοθετημένης, ενσωματωμένης δραστηριότητας. Η μέθοδος της ενεργητικής μάθησης της Castelnuovo είναι συνεπής με το παρόν πλαίσιο και υιοθετείται σε αυτή την πρόταση, περιέχοντας μέρος από το συγκεκριμένο υλικό της, καθώς και τον τρόπο χρήσης της.

Ο σχεδιασμός της πρότασης

Το μαθησιακό πλαίσιο επικεντρώνεται στη χρήση δυναμικών μοντέλων, τα οποία δημιουργούνται από στοιχεία ενός απλού υλικού: ενός “γεωμετρικού Meccano” - αποτελούμενο από ράβδους σε διαφορετικά χρώματα και μήκη (φτιαγμένους από πλαστικό, ξύλο ή μέταλλο), με τρύπες στην κάθε άκρη ή τρύπες που απέχουν το ίδιο ή μια από την άλλη κατά μήκος των ράβδων—γάτζους και κορδόνια (Photo 1).



Photo 1

Θα ήταν καλύτερο να επιτραπεί στους μαθητές να φτιάξουν τα ξυλάκια μόνοι τους, ακολουθώντας γραπτές οδηγίες —αναφερόμενες στην ποιότητα και τις μετρήσεις των αντικειμένων που θα παραχθούν— αφού προηγουμένως σχεδιάσουν τις ράβδους σε πλαστικά φύλλα (ή χαρτόνι) και τέλος να τις κόψουν και να φτιάξουν τις τρύπες.

Η εργασία έχει σκοπό να παρέχει αισθητικοκινητικές εμπειρίες του αντικειμένου “τρίγωνο” και να δημιουργήσει προϋποθέσεις διαχείρισης της γλώσσας—σε γραπτή ή προφορική μορφή— όσον αφορά στην περιγραφή του τι κάνουν και τι βλέπουν οι μαθητές. Επιπροσθέτως, το θέμα δίνει μια πολυπολιτισμική οπτική της ανθρώπινης γνώσης και τεχνολογίας.

Η δραστηριότητα υλοποιείται:

- σε ζευγάρια ή σε μικρές ομάδες μαθητών, όπου χτίζουν επίπεδες δυναμικές μορφές, αναλύοντας τις κατασκευές, σχεδιάζοντας, γράφοντας παρατηρήσεις ή σχόλια,
- στην τάξη για στιγμές συζήτησης/σύγκρισης των αποτελεσμάτων.

Η πρόταση χωρίζεται σε τρεις συνεδρίες: Συνεδρία 1, με λειτουργία εισαγωγής, Συνεδρίες 2 και 3 που παρέχουν ένα φυσικό γνωστικό μονοπάτι από την ιδέα των σχημάτων με τις τρεις πλευρές μέχρι την έννοια του τριγώνου, και μέχρι τα κριτήρια της ισότητας. Κάθε ένα δομείται σε μια ακολουθία βημάτων όπως φαίνεται παρακάτω.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΚ ΤΩΝ ΠΡΟΤΕΡΩΝ

Η πρόταση σχεδιάστηκε για να αντιμετωπίσει τα τωρινά εκπαιδευτικά προβλήματα σε πολυπολιτισμικές τάξεις, ειδικά:

- αύξηση διαφορών ανάμεσα στα άτομα (που εξαρτώνται από τις κουλτούρες προέλευσης, προηγούμενα εκπαιδευτικά συστήματα και σχολικές εμπειρίες, επίπεδα εννοιολογικής και γνωστικής ανάπτυξης, επίπεδα γνώσης της Γ2...)
- μορφές αμηχανίας (που αποδεικνύονται από συμπεριφορές όπως απομόνωση, δυσπιστία ή αδιαφορία για τις σχολικές δραστηριότητες και έλλειψη κατάλληλης προσοχής/συμμετοχής)

Η αρχική ιδέα του έργου είναι:

- να δημιουργήσει ένα περιβάλλον που να ευνοεί την πράξη και την ατομική εμπειρία σε ένα κοινωνικό περιβάλλον, παρέχοντας κατάλληλα μέσα για να μειωθούν οι λεκτικές οδηγίες.

Ο εκπαιδευτικός στόχος συνίσταται στο:

- να επιτρέψει σε όλους να εφαρμόσουν γνωστικές διαδικασίες, ακόμη και όταν παρουσιάζονται γλωσσικές δυσκολίες
- να θεμελιώσει τη γλωσσική ανάπτυξη στην εμπειρία και τις σχέσεις με τους συνομηλίκους.

Η επιλογή του υλικού και η χρήση του έχουν τον αποκλειστικό σκοπό να υποστηρίξουν τη διαδικασία παραγωγής νοητικών εικόνων. Αυτή η διαδικασία είναι απαραίτητη για την εννοιολογική αναπαράσταση, σύμφωνα με τα στάδια του Στρουκτουραλισμού (*αισθησιο-κινητική εμπειρία, νοητικές εικόνες-ιδέες*). Όσον αφορά στα *νοητικά σχήματα* – τα θεμελιακά στοιχεία αντίληψης που επιτρέπουν τη δημιουργία εμπειριών σε χωρικές σχέσεις- το μεγαλύτερο μέρος του έργου επικαλείται το νοητικό σχήμα της *επαφής*.

Η ΠΙΛΟΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αυτή η πρόταση εφαρμόστηκε πιλοτικά σε δυο τάξεις της πρώτης τάξης του Γυμνασίου “Gandhi” (Φλωρεντία). Τα δυο δείγματα αντίστοιχα αποτελούνταν από 22 μαθητές (6 μετανάστες και 5 με μαθησιακά προβλήματα) και 21 μαθητές (7 μετανάστες και 5 με μαθησιακά προβλήματα) και δυο καθηγητές (G. Sallustio και A. Scialpi) με τη βοήθεια ενός εκπαιδευτή.

Πρώτα το περιέγραψε ο εκπαιδευτής και συζήτησε με τους δυο καθηγητές σε ποιες τάξεις θα γινόταν η πιλοτική εφαρμογή.

Το έργο διεξήχθη σε τρεις συνεδρίες.

Συνεδρία 1: Εξοικείωση με το υλικό (1 και μισή ώρα)

Παρουσίαση του “γεωμετρικού meccano”

Οι μαθητές από τις δυο τάξεις συγκεντρώθηκαν σε μια μεγάλη αίθουσα. Καθώς η δραστηριότητα έπρεπε να γίνει με καινούριο κατασκευασμένο υλικό, το πρώτο βήμα ήταν να παρουσιαστεί και να γίνει επίδειξη του τρόπου χρήσης του, καθώς και να αξιολογηθούν οι ικανότητες των μαθητών: οι εκπαιδευτικοί έδειξαν το υλικό, πως ενώνονται τα κομμάτια στις άκρες των ράβδων με γατζάκια, ποια στοιχεία να διατυπώσουν και ποια διαφορετικά σχήματα μπορούν να κατασκευαστούν με αυτά.

Οι πρώτες ελεύθερες συνθέσεις

Η δραστηριότητα έγινε σε μικρές ομάδες μαθητών (3-4) που τοποθετήθηκαν γύρω από θρανία τα οποία είχαν ενωθεί κατάλληλα.

Η κάθε ομάδα μαθητών πήρε ένα σετ από ξυλάκια (15-20) και γατζάκια: έφτιαξαν πολλές συνθέσεις, διαλέγοντας ελεύθερα και ενώνοντας τα ξυλάκια (σχέδια 1.2, 1.3). Μετά τους ζητήθηκε να ζωγραφίσουν τα πιο ωραία και να αναπαράγουν τις κατασκευές, που είχαν δημιουργήσει, σε φύλλα χαρτί. Ο εκπαιδευτικός μάζεψε αυτές τις ζωγραφιές στο τέλος της εργασίας (με σκοπό να πραγματοποιήσει μια τελική έκθεση που αφορούσε όλη τη δραστηριότητα) (βλέπε φωτογραφία). Πριν επιτρέψει στους μαθητές να εκτελέσουν τη δραστηριότητα, ο καθηγητής δήλωσε ότι θα μελετούσαν το *σχέδιο με τις τρεις πλευρές* στις επόμενες συνεδρίες.

Συνεδρία 2: Φτιάχντας το πλαίσιο των κινήτρων (4 ώρες)

Εργασία στοχασμού/αναστοχασμού (30 λεπτά)

Αυτό το έργο έγινε στην αίθουσα θεάτρου του σχολείου που διέθετε προβολικό και οθόνη, με τους μαθητές των δυο τάξεων να κάθονται στην πλατεία.

Πρώτον, δόθηκαν τρία ξυλάκια και γατζοί σε κάθε μαθητή για να κάνει τις ενώσεις και του είπαν να:

- παρατηρήσει τα σχέδια που συνέθεσε,
- ψάξει στο μυαλό του/της -με τα μάτια κλειστά- να βρει εικόνες τριγωνικών αντικειμένων από τον πραγματικό κόσμο,
- γράψει το όνομα και να σχεδιάσει το αντικείμενο που φαντάστηκε σε ένα φύλλο χαρτί.

Ο εκπαιδευτικός εστίασε σε διάφορα παραδείγματα από σχήματα είτε φανταστικά είτε από αυτά που είχαν κατασκευάσει και συνέλεξε τα σχεδιασμένα. (Photo 2).

Προβολή με σχόλια (30 λεπτά)

Μια μεγάλη συλλογή από φωτογραφίες προβλήθηκε στην οθόνη για να κατανοήσουν όλοι πόσα πολλά τρίγωνα υπάρχουν στον πραγματικό κόσμο. (Photo 3)

Έπειτα, οι δραστηριότητες έγιναν παράλληλα σε δυο χωριστές τάξεις.



Photo 2



Photo 3

Πλοήγηση στο διαδίκτυο (1 ώρα)

Στο εργαστήριο υπολογιστών, οι μαθητές χωρίστηκαν σε μικρές ομάδες και τους ζητήθηκε —εν μέρει καθοδηγούμενοι από τον εκπαιδευτή— να βρουν ιστοσελίδες στο διαδίκτυο που αφορούσαν τα τρίγωνα. Ορίστηκαν τα αποτελέσματα της αναζήτησης συλλέγοντας τις προτιμώμενες παρουσιάσεις.

Μια πολυπολιτισμική επισκόπηση (1 ώρα)

Ο εκπαιδευτικός τόνισε τη διαδεδομένη χρήση της “τριγωνοποίησης” σε όλες τις κουλτούρες και εποχές της ανθρώπινης ιστορίας, από τις πιο αρχαίες μέχρι τις σημερινές, εστιάζοντας και συζητώντας μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- καθημερινές χρήσεις και εφαρμογές (άκρα από βέλη, εργαλεία ...)
- τα πρώτα κτήρια (σκηνές και μπανγκαλόου)
- αρχιτεκτονικές κατασκευές (τεχνολογία επιστέγασης, κατασκευή πέργκολας, οπτικές ίνες...)
- μετρήσεις
- χαρτογράφηση (κτήρια, διαμερίσματα, πόλεις, χερσαίες εκτάσεις ...)
- έργα τέχνης και αρχιτεκτονικής που έγιναν όλο και πιο πολύπλοκα

Το θέμα σχετίζεται με επιτυχείς αναδύσεις του τριγώνου: κάποιες από αυτές που επισημάνθηκαν ήταν οι ακόλουθες:

- η ευστάθεια της τριγωνικής κατασκευής
- η δυνατότητα να τονιστεί και να διορθωθεί οποιοδήποτε σημείο στη χαρτογραφική διαδικασία
- αισθητική αξία

Δυο πειράματα Two experiments (1 ώρα)

Έγιναν δυο πειράματα σε συνεργασία με τον καθηγητή της Τεχνικής Εκπαίδευσης:

- το ένα στόχευε να ελέγξει την ευστάθεια μιας τριγωνικής δομής, συμπιέζοντας αληθινά μοντέλα, ακόμη και αυτά που έγιναν από διπλωμένο χαρτί,

- το άλλο αφορούσε στη χαρτογράφηση της τάξης με χρήση εργαλείου (distance-reliever). Η αίθουσα ήταν περίπου ορθογώνια στο σχήμα και οι μαθητές μπορούσαν να καταλάβουν και να εκτιμήσουν την ανάγκη να σχεδιάσουν μια διαγώνια γραμμή για να μπορέσουν να κάνουν τη χαρτογράφηση. Μια αξιολόγηση της διαδικασίας να ενωθούν τα τέσσερα ξυλάκια —χρησιμοποιώντας τις ράβδους— ξεκαθάρισε την κατάσταση και επεσήμανε ότι η μόνη σύνθεση που μπορούσε να γίνει ήταν ενώνοντας ένα ξυλάκι με δυο αντίθετες κορυφές τριγώνου.

Συνεδρία 3. Νοητική κατασκευή και γλωσσική ανάπτυξη (3 ώρες)

Η δραστηριότητα οργανώθηκε σε μικρές ομάδες (3-4) και εξελίχθηκε μέσα από διαφορετικά βήματα αυξανόμενης δυσκολίας.

Όροι ύπαρξης τριγώνου (1 ώρα)

Η δραστηριότητα συνεχίστηκε με την κατασκευή ενός τριγώνου που ένωνε τρία ξυλάκια. Κάθε ομάδα μαθητών πήρε δυο διαφορετικά σετ από τριπλά ξυλάκια, δυο συνεχόμενες φορές: η δραστηριότητα αποτελούνταν από το συνδυασμό των κομματιών ώστε να γίνουν δυο σχήματα, για να συνειδητοποιήσουν ότι:

1. η πρώτη τριάδα οδηγεί στην παραγωγή *μόνο ενός* κλειστού σχήματος (δηλαδή ενός τριγώνου!)
2. η δεύτερη τριάδα οδηγεί σε *πολλά* “ανοιχτά” σχήματα ... (Photo 4)

Οι γραφικές αναπαραστάσεις των σχημάτων που προέκυψαν σε κάθε περίπτωση —ένας μαθητής στην ομάδα θα μπορούσε να παίζει το ρόλο του “ανταποκριτή”— ήταν ένα χρήσιμο μέσο για να καταγραφούν τα αποτελέσματα.

Μέσα σε κάθε ομάδα, ο καθηγητής παρατηρούσε τις *αυθόρμητες* πράξεις των μαθητών κατά τη διάρκεια της δραστηριότητάς τους, την προφορική ομιλία και την ορολογία που χρησιμοποιούσαν (όπως “ράβδος” ή “πλευρά”, “ανοιχτός”, “κλειστός”, “χώρος”, “αναλογία”, “άθροισμα”, “μήκος”...). Προοδευτικά, ζητήθηκε από τους μαθητές κάθε ομάδας να γράψουν ένα σχόλιο σε φύλλα χαρτιού σχετικά με το τι έβλεπαν. Τους ζητήθηκε μόνο να γράψουν “Βλέπω ότι...”. Ο καθηγητής συνέλεξε τα χαρτιά για να αναλύσει τα συμπεράσματα που προέκυψαν.

Μετά από αυτό, ο καθηγητής είπε στους μαθητές να προσέξουν τη συνθήκη για την κατασκευή ενός τριγώνου και τον αριθμό πιθανοτήτων, βάζοντας το ακόλουθο πρόβλημα (προσαρμοσμένο από το “Ξυλάκια και Τρίγωνα”, 21° RMT, και αναφέρθηκε στο όνομα ενός μαθητή):

< Ο Ιμπραήμ βάζει στο θρανίο του πέντε ξυλάκια διαφορετικού μήκους: 4 μονάδες, 5 μονάδες, 6 μονάδες, 9 μονάδες, 11 μονάδες. Πόσα διαφορετικά τρίγωνα μπορεί να φτιάξει; Εξηγήστε όλες τις πιθανότητες. >

Κατασκευή τριγώνων με ένα δεδομένο στοιχείο (πλευρά/γωνία) (1 ώρα)

Αφού πρότεινε στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν ξυλάκια, άλλα κορδόνια ή λαστιχάκια για να φτιάξουν τρίγωνα, ο καθηγητής τους έδωσε χρόνο για να

δουλέψουν. Μετά άρχισε τη συζήτηση μέσα στις ομάδες κάνοντας την ακόλουθη ερώτηση:

- Ποιά στοιχεία βλέπετε που μπορεί να αλλάξουν από τις κινήσεις;

Ενθάρρυνε τους μαθητές να σχολιάσουν κατά τη διάρκεια μιας συνεδρίας της ολομέλειας.

Κατασκευή τριγώνων με δυο δεδομένα στοιχεία (πλευρά&γωνία/ πλευρά&πλευρά/ γωνία&γωνία) (1 ώρα)

Κατά τη διάρκεια αυτής της συνεδρίας, ο εκπαιδευτικός ζήτησε από τους μαθητές να τοποθετήσουν το υλικό στερεώνοντας μια πλευρά και μια γωνία και να χρησιμοποιήσουν κορδόνια ώστε να επεκτείνουν τη μια πλευρά και να κλείσουν το τρίγωνο. Έπρεπε να χτίσουν, να παρατηρήσουν και να κάνουν γραφικές αναπαραστάσεις των σχεδίων που προέκυψαν σε διάφορες πιθανές συνθέσεις. (Photo 5)

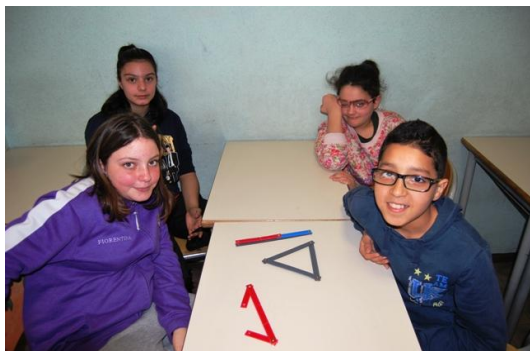


Photo 4



Photo 5

Δημιουργήθηκε ένας προβληματισμός όταν ρώτησε τις ακόλουθες δυο ερωτήσεις:

- Αλλάζει κάτι αν δώσουμε άλλη γωνία;
- Αλλάζει κάτι αν δώσουμε άλλη πλευρά;

Όπως αναφέρθηκε και πριν, τα σχόλια συγκεντρώθηκαν και οργανώθηκαν.

Ορισμοί

Μετά από αυτή τη δραστηριότητα, οι μαθητές ασχολήθηκαν μόνο με προφορική περιγραφή που αναφερόταν σε μερικά παράξενα τριγωνικά σχήματα και μοιράστηκαν τη σχετική τεχνική ορολογία (όπως ισοσκελές, ορθογώνιο, ισόπλευρο και σκαληνό). Επιπροσθέτως, ζητήθηκε ξανά από τους μαθητές να φανταστούν τρίγωνα που ανήκαν στις αναφερόμενες κατηγορίες και να περιγράψουν την πιθανή διαφορά ανάμεσα στα στοιχεία της κάθε κατηγορίας.

Λύση προβλήματος

Η φάση της λύσης προβλήματος εφαρμόστηκε για να επιβεβαιωθεί η ικανότητα αναγνώρισης τριγώνων (βλέπε Παράρτημα για τις δραστηριότητες).

Το υλικό και τα πιο ενδιαφέροντα προϊόντα της εργασίας παρουσιάστηκαν από μερικούς μαθητές –που συμμετείχαν στο πρόγραμμα— στην έκθεση με τα καλύτερα έργα, η οποία οργανώθηκε από το σχολείο κατά τη διάρκεια μιας παραδοσιακής διοργάνωσης για το τέλος της χρονιάς (βλέπε φωτογραφία).

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΚ ΤΩΝ ΥΣΤΕΡΩΝ

Αρκετά αποτελέσματα μπορούν να εξαχθούν από τη δραστηριότητα, εδώ θα επικεντρωθούμε στα πιο χρήσιμα, που δείχνουν αν και πως η πρόταση που εφαρμόστηκε πέτυχε τους στόχους της.

- Ενδείξεις των δυνατοτήτων του “γεωμετρικού meccano” μέσα στη διαδικασία μαθηματοποίησης.

Αυτή η πρακτική έχει δείξει ότι η χρήση του συγκεκριμένου υλικού –σε ένα κοινωνικό περιβάλλον –ευνοεί την ατομική εσωτερική αναδόμηση εξωτερικών λειτουργιών. Θα συζητήσουμε μόνο το ρόλο που έπαιξε το υλικό στην ανακάλυψη της “τριγωνικής ανισότητας”. Η ράβδος φάνηκε ότι ήταν ένα *κατασκεύασμα* με τη δυνατότητα να εξελιχθεί σε “ευθύγραμμο τμήμα” που αντιπροσωπεύεται από το γλωσσικό σημαίνον “πλευρά”. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι κατά τη διάρκεια αυτής της εξάσκησης τα τρία ξυλάκια δεν παίζουν τον ίδιο ρόλο. Οι μαθητές έχουν την τάση πρώτα να εξετάζουν τη ράβδο με τα σταθερά άκρα –που αποκαλούν “βάση”— και έτσι παίρνουν υπόψη τους τις άλλες δυο ράβδους, οι οποίες έχουν ακόμη κάποιο βαθμό ελευθερίας. Αυτή η διαδικασία ωθεί τους μαθητές να αναπτύξουν μια φυσική ταξινόμηση των άκρων σε δυο διαφορετικούς τύπους: η πρώτη ομάδα αναφέρεται σε σταθερά στοιχεία και η δεύτερη σε αυτό που αποκαλείται “υπολειμματικά”. Ο ρόλος των “υπολειμματικών” φάνηκε ότι ήταν σημαντικός επειδή επέτρεψε να αναγνωριστεί η ύπαρξη σχέσης ανάμεσα στα στοιχεία στα οποία βασίζεται σε σημαντικό βαθμό η δυνατότητα του “κλεισίματος του σχήματος”. Τα ακόλουθα σχόλια προέκυψαν από την ανάλυση των πρωτοκόλλων που σχετίζονται με τη Συνεδρία 2, συγκεκριμένα απαντώντας στην πρόταση: “Βλέπω ότι ...”. Θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι αυτή η συνειδητοποίηση επιφέρει μια αυθόρμητη γνωστική διαδικασία, που μπορεί να ανιχνευθεί στις λέξεις που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές – όπως “*κοντός/μεσαίος/μακρύς*”, “*αναλογικός/μη-αναλογικός*”, “*διαφορετικός/ίσος*” και, κατά συνέπεια, από εκφράσεις που αναφέρονται σε συγκρίσεις που βασίζονται σε μετρική ερμηνεία. Τα βασικά βήματα αυτής της διαδικασίας βρίσκονται σε δυο συγκεκριμένες περιπτώσεις: τα ισόπλευρα και τετριμμένα τρίγωνα. Η πρώτη περίπτωση χαρακτηρίζεται από προτάσεις όπως: “*κλείνει επειδή οι πλευρές είναι ίσες*”. Η δεύτερη περίπτωση –που δεν αναμενόταν– αποκαλύπτει μια δυναμική λειτουργία, επειδή οδηγεί τους μαθητές στη μαθηματοποίηση του όρου της κλειστοτητος όσον αφορά το “μήκος” και το “άθροισμα των μηκών”. Όντως, σε αυτή την περίπτωση, το άθροισμα των μηκών από δυο ξυλάκια εκλαμβάνεται ως ίσο με το τρίτο, όπως εκφράζεται σε προτάσεις όπως: “*οι δυο πλευρές συμπληρώνουν την πρώτη*”, ή “*δυο πλευρές δίνουν το μήκος της μεγαλύτερης*”. Το ακόλουθο βήμα

αποτελείται από τη δήλωση της σχέσης της τριγωνικής ανισότητας: “το σχήδιο κλείνει όταν οι δυο άκρες είναι μεγαλύτερες από την τρίτη”.

- Όργανα για την αναγνώριση των λογικών/γεωμετρικών ικανοτήτων

Για παράδειγμα:

1. η αδυναμία διάκρισης μεταξύ των δυο προηγούμενων συνθέσεων όσον αφορά στις ποσοτικοποιήσεις: αν το σχήδιο κλείνει, *κάθε* πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δυο άλλων/ αν το σχήδιο δεν κλείνει, *υπάρχει μόνο μια* πλευρά μεγαλύτερη από το άθροισμα των δυο άλλων.
2. η αδυναμία να συμπεράνουμε το αντίστοιχο κριτήριο ισότητας από την πιθανότητα να κατασκευαστεί ένα μοναδικό τρίγωνο –με συγκεκριμένα δεδομένα.

Τα προβλήματα αναφέρονται στην ανεπάρκεια οπτικοποίησης και γλωσσικών ικανοτήτων (1), όπως επίσης και στη δυσκολία διαχείρισης της συγκριτικής ιδιότητας της ισότητας (2).

- Όργανα για την αξιολόγηση των γνωστικών αποκλίσεων μεταξύ των μαθητών μέσα στην τάξη

Η εργασία βοήθησε στο να ελεγχούν τα διαφορετικά επίπεδα ικανοτήτων ανάμεσα στους μαθητές που εμπλέκονταν στο έργο και να σχεδιαστούν κατάλληλες μελλοντικές εκπαιδευτικές δράσεις. Παραδείγματα δυο οριακών περιπτώσεων είναι:

1. η αδυναμία να αντιπροσωπευθεί γραφικά μια συγκεκριμένη σύνθεση από ράβδους (το άτομα κατάφερε να το κάνει μόνο αναπαράγοντας την κίνηση του δείκτη, τακτικά, σε κάθε ράβδο) (φωτογραφία)
 2. η ικανότητα να γίνει μια τέλεια περιγραφή της διαδικασίας υπολογισμού του αριθμού όλων των πιθανών τριγώνων στο πρόβλημα “Ξυλάκια και τρίγωνα” (παρατηρώντας ότι στο συγκεκριμένο πλαίσιο ο ίδιος αριθμός εμφανίζεται τρεις φορές).
- Καταλληλότητα της πρότασης να αντιμετωπίσει τα τυπικά προβλήματα μιας πολυπολιτισμικής τάξης.

Εξαιτίας της ευελιξίας και προσαρμοστικότητας στις ικανότητες καθενός υποκειμένου, η μέθοδος είναι κατάλληλη να αντιμετωπίσει τις αποκλίσεις που βασίζονται στην έλλειψη γνωστικής/ εννοιολογικής ομοιογένειας και στη χρήση των Ιταλικών ως Γ2. Κάθε μαθητής συμμετείχε στη δραστηριότητα τουλάχιστον αγγίζοντας και βλέποντας αληθινά αντικείμενα.

- Γλωσσική εξέλιξη

Το έργο επιβεβαιώνει ότι η γλωσσική εξέλιξη, βασισμένη σε αποτελεσματική επίγνωση, υποστηρίζεται σωστά όταν οι μαθητές λειτουργούν με άμεσο τρόπο, ενώ υπάρχει αλληλεπίδραση και ανταλλαγή ιδεών με τους συνομιλήκους, συγκρινόμενη με την περίπτωση κατά την οποία μαθαίνουν απλά ακούγοντας τον καθηγητή και

αναφερόμενοι σε στατικά σχέδια. Αυτό εν μέρει ήταν το επιχείρημα στην προηγούμενη ανάλυση. Επιπλέον, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η οργάνωση της σκέψης, μαζί με την προφορική της εξήγηση, ήταν αυτή που παρουσίασε τις μεγαλύτερες δυσκολίες κατά τη διάρκεια οργάνωσης της πιλοτικής εφαρμογής και δεν περιοριζόταν στους ξένους μαθητές. Οι μετασχηματισμοί ενός συγκεκριμένου σχήματος —με το χειρισμό του— οδηγούν το άτομο να *πει/προσπαθήσει να πει τι κάνει* και έτσι βοηθούν τη γλωσσική μάθηση και στο να ξεπεραστούν τα κενά (παρουσία/έλλειψη λέξεων, κατάλληλη/ακατάλληλη χρήση, αόριστη/αυστηρή χρήση ...).

- Επιρροή σε ατομικά συναισθηματικά στοιχεία

Οι μαθητές βρήκαν τις δραστηριότητες πραγματικά συναρπαστικές και έδειξαν

- περιέργεια και διασκέδαση στην κατασκευή των σχεδίων με τη χρήση ράβδων
- ευχαρίστηση που δούλεψαν σε μικρές ομάδες
- ενδιαφέρον για αυτά που μπορούσαν να δουν χειροπιαστά και να ανακαλύψουν
- ενδιαφέρον στον να αναλύσουν τον πραγματικό κόσμο και τις γεωμετρικές σχέσεις του.

Όλοι βρήκαν την εργασία διασκεδαστική και κράτησαν την προσοχή του εστιασμένη για μεγάλο χρονικό διάστημα. Την πιο χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί ένα κορίτσι Κινέζικης καταγωγής που πριν είχε αρνηθεί να συμμετάσχει σε οποιαδήποτε σχολική δραστηριότητα και που τελικά άρχισε να δραστηριοποιείται.

- Επιδράσεις στην εκπαίδευση των καθηγητών

Από την άποψη της εκπαίδευσης των καθηγητών, η εφαρμογή αυτής της δραστηριότητας είχε καλή επιρροή: στην παρούσα φάση υπάρχουν τέσσερις εκπαιδευτικοί στο σχολείο που έχουν τη διάθεση να αναθεωρούν μαθηματικές έννοιες και να ανανεώνουν τη διδασκαλία. Δόθηκε μια αίθουσα για τα μαθήματα των μαθηματικών, — εξοπλισμένη με εργαλεία και υλικά και κατάλληλη για ομαδοσυνεργατική εργασία — δίνοντας προτεραιότητα στην προσέγγιση ενεργητικής μάθησης/διδασκαλίας.

Βιβλιογραφία

- Bartolini Bussi, M. G., Mariotti M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective, in English L. D. (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (second edition) (746-783). Routledge.
- Castelnuovo, E. (2008). *L'officina matematica: ragionare con i materiali*. Lorenzoni F. (ed.). Molfetta: La Meridiana.
- Furinghetti, F., Menghini, M. (2014). The role of concrete materials in Emma Castelnuovo's view of mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics* **87** (1-6). Dordrecht: Springer.

Núñez, R. E., Edwards, L. D., Matos, J. F. (1999). Embodied Cognition as Grounding for Situatedness and Context in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics* 39: (45-65). Dordrecht: Springer.

Rossi, P. G. (2011), Didattica enattiva. Complessità, teorie dell'azione, professionalità docente. Milano: Franco Angeli

<http://www.di.ens.fr/~longo/geocogni.html>

Δεύτερη πιλοτική εφαρμογή

από την Hana Moraona^{**}

Πιλοτική εφαρμογή/ Σιένα- Τρίγωνα

Πράγα, 27 Μαΐου 2014, 4 συνεχόμενα μαθήματα, 7^η grade, CLIL

1. Πρώτη δραστηριότητα (δεν είχαμε εργαλειοθήκη για την κατασκευή), δόθηκαν στους μαθητές ξυλάκια από σουβλάκια και τους ζητήθηκε να φτιάξουν ξυλάκια 4,5,6, 9 and 11 εκατοστών, και μετά τους ζητήθηκε να φτιάξουν όσα πιο πολλά τρίγωνα μπορούσαν από αυτά –ανακάλυψη/επανάληψη της έννοιας της τριγωνικής ανισότητας (Photo 1).
2. Φύλλο 1 – βλέπε επισυναπτόμενο, ατομική δουλειά
3. Σχηματισμός τριγωνικής ανισότητας στα Αγγλικά
4. Γωνίες σε ένα τρίγωνο/ άθροισμα των εσωτερικών των τριγώνων, μεγέθη εσωτερικών γωνιών, μήκη πλευρών και γωνιών (Photo 2).



Photo 1



Photo 2

5. Ορολογία – ισόπλευρο, ισοσκελές, σκαληνό και αμβλυγώνιο, οξυγώνιο, ορθογώνιο (Photos 3-4-5-6-7).
 - α. Ταξινόμηση τριγώνων σε εικόνες
 - β. Κόψιμο διαφορετικών τριγώνων από χρωματιστό χαρτί με αναφορά του ονόματός τους.

^{**} Πανεπιστήμιο Charles στην Πράγα, Τσεχία



Photo 3



Photo 4



Photo 5

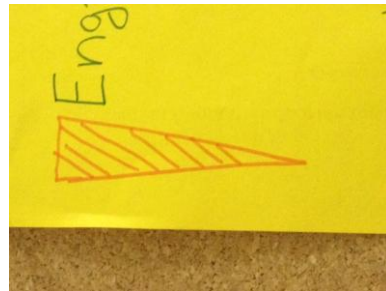


Photo 6

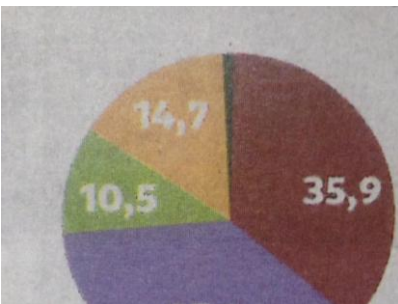


Photo 7



Photo 8

6. Τα τρίγωνα στην αρχιτεκτονική (Photo 8))
7. Τα τρίγωνα γύρω μας, χρησιμοποιώντας κινητά για να βγουν φωτογραφίες αντικειμένων με τριγωνικό σχήμα που μπορούσαν να βρουν στο σχολικό κτήριο (δείγματα ως παράρτημα)
8. Σχεδιασμός ενός τριγωνικού δαπέδου με πλακάκια (δείγματα ως παράρτημα)
9. Πεντάγωνο αστέρι και εξάγωνο αστέρι, εξάγραμμο, Άστρο του Δαβίδ, σημαίες, σημασίες στις κουλτούρες, πως να τα σχεδιάσετε, να τα κατασκευάσετε, να τα διπλώσετε.

Τρίτη πιλοτική εφαρμογή

από τους Marie-Hélène Le Yaouanq^{***} και Brigitte Marin^{***}

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η τρίτη πιλοτική εφαρμογή έγινε από τον κύριο Paulou, καθηγητή μαθηματικών στο Γυμνάσιο Roger Martin du Gard, ένα σχολείο που βρίσκεται σε Περιοχή Εκπαιδευτικής Προτεραιότητας (στα Γαλλικά: ZEP «Zone d'Éducation Prioritaire»), στην τάξη 7.

Οι έννοιες που σχετίζονται με το τρίγωνο στο αναλυτικό πρόγραμμα της 7ης Τάξης είναι η τριγωνική ανισότητα και το εμβαδόν του τριγώνου. Περιπτώσεις ίσων τριγώνων δε συμπεριλαμβάνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα. Παρ' όλα αυτά, ενθαρρύνουμε τους μαθητές να παρατηρήσουν ότι στην περίπτωση κατασκευής ενός τριγώνου, όταν δίνεται η μια πλευρά του, κάποιος μπορεί να κατασκευάσει αρκετά τρίγωνα, συμμετρικά ανά δυο δυο ως προς αυτή την πλευρά.

Αυτή η σειρά μαθημάτων αποτελούνταν από δυο φάσεις.

ΦΑΣΗ 1: ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

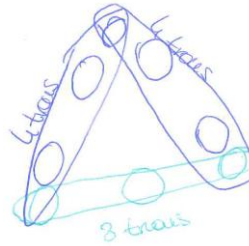
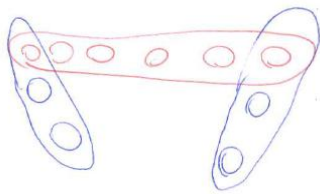
Η συνεδρία διερεύνησης αποτελείται από τρία βήματα.

Μια φάση δράσης που βασίζεται σε ένα παιχνίδι που λέγεται «Meccano» στο οποίο πλαστικές ράβδοι, με διαφορετικά μήκη, μπορούν να συναρμολογηθούν με βίδες. Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες. Ράβδοι με διαφορετικά μήκη μοιράζονται και οι μαθητές πρέπει να προσπαθήσουν να φτιάξουν όσο περισσότερα διαφορετικά τρίγωνα μπορούν.



Για να κρατήσουν αρχείο των δοκιμών τους πρέπει να σχεδιάσουν τα διαφορετικά αποτελέσματα που προέκυψαν σε ένα κομμάτι χαρτί.

^{***} Πανεπιστήμιο UPEC University, ESPE, Créteil (Γαλλία).



Μετά ακολουθεί μια φάση συλλογικής εργασίας για να γίνει μια απογραφή των τριγώνων που μπορούν να κατασκευαστούν και αυτών που δεν μπορούν. Έπειτα ο καθηγητής δίνει ένα παιχνίδι: οι μαθητές πρέπει να μαντέψουν αν κάποιος μπορεί να φτιάξει ή όχι ένα τρίγωνο με δεδομένη μήκη πλευρών. Ο εκπαιδευτικός παρεμβαίνει μόνο για να ρυθμίσει, οι μαθητές πρέπει να συζητήσουν όλοι μαζί προφορικά. Αυτή η φάση δείχνει πόσο δύσκολο είναι για τους μαθητές να βρουν μια ακριβή διατύπωση εκτός από “όχι μεγάλο κενό”, “μικρό μήκος”, κλπ. (Margolinas, 2010).

Από την άλλη μεριά, μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι στο τέλος της συνεδρίας η δραστηριότητα έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές να αναπτύξουν μια μέθοδο που τους επέτρεπε να αποφασίσουν αν ένα τρίγωνο με δεδομένο μήκος μπορούσε να κατασκευαστεί ή όχι.

Οι ακόλουθες συνεδρίες είναι αφιερωμένες στο να διατυπωθούν ιδιότητες και να χρησιμοποιηθούν ξανά, για να αποκαλύψουν την ύπαρξή τους και να δείξουν τα διαφορετικά πιθανά τρίγωνα κατά τη διάρκεια της κατασκευής με όργανα και την ισότητά τους, βασισμένη στα τρίγωνα που έφτιαξαν με το Meccano.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι μαθητές συχνά αντιμετώπιζαν δυσκολίες με την περίπτωση του πεπλατυσμένων τριγώνων κατά την κατασκευή τους με χάρακα και διαβήτη (με σχέδια όχι πεπλατυσμένων τριγώνων με μήκος πλευρών 4,5,9), το οποίο δεν εμφανίστηκε κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας, καθώς ο χειρισμός οδήγησε κατευθείαν σε αυτή την περίπτωση στην τοποθέτηση των ράβδων πάνω.

ΦΑΣΗ 2: Οι μαθητές έπρεπε να κάνουν μια έρευνα για τις σημαίες των χωρών στις οποίες εμφανίζεται ένα τρίγωνο. Έπρεπε να διαλέξουν μια, να την περιγράψουν από γεωμετρική άποψη, να την παρουσιάσουν και να ψάξουν τη σημασία των διάφορων στοιχείων της σημαίας σε σχέση με τη χώρα που αντιπροσωπεύεται από αυτή τη σημαία (σχήματα, χρώματα).

Αυτή η εργασία έπρεπε να γίνει σε ζευγάρια εκτός σχολείου, μετά έπρεπε να γαφτεί και να παρουσιαστεί στην τάξη. Οι μαθητές συμμετείχαν σε αυτή την εργασία με ενθουσιασμό και έφεραν ιδιαίτερα προσεγμένες παρουσιάσεις.

Αυτή η εργασία ολοκληρώθηκε με τον υπολογισμό του εμβαδού σε σχέση με το εμβαδόν του τριγώνου και την έκφραση της αναλογίας με ποσοστά. Εμφανίστηκαν πολλά πιθανά ανοίγματα σε αυτή τη φάση, όπως η γραπτή έκθεση κατασκευαστικού προγράμματος ή η διαθεματικότητα.

Βιβλιογραφία

Margolinas, 2010, Un point de vue didactique sur la place du langagier dans les pratiques d'enseignement des mathématiques

<https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-00470238/document> (retrieved on 01/05/2015)

Conclusions from the three piloting

by Maria Piccione

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Το όλο εγχείρημα συνδυάζει δυο συστατικά που αφορούν *τι* και *πώς* ένα συγκεκριμένο θέμα θα μπορούσε να διεξαχθεί σε μια πολυπολιτισμική τάξη: ένα διδακτικό μοντέλο, από τη μια, και κάποιες πρακτικές προτάσεις, από την άλλη. Τα παραγόμενα αποτελέσματα μας ενθαρρύνουν να συνεχίσουμε αυτή την εργασία.

Μερικές εργασιακές επιλογές και συμπεριφορές μαθητών μπορούν να επισημανθούν από την πιλοτική εφαρμογή, εξαιτίας της μαθηματικής τους αξίας και της θετικής ανατροφοδότησης.

Στη δεύτερη πιλοτική εφαρμογή, το υλικό αποτελούνταν από απλά ξυλάκια για σουβλάκια: έτσι, επέτρεπε στους μαθητές να έχουν μια αισθητηριακή εμπειρία των τριγωνικών σχηματισμών, τη βάση για την επόμενη δραστηριότητα για την τριγωνική ανισότητα. Επιπροσθέτως, η βιωματική εκπαίδευση υποστηρίχθηκε από δραστηριότητες όπως κόψιμο/δίπλωμα χαρτιού, σχεδιασμός – ακόμη και περίπλοκων- “τριγωνοποιημένων” σχεδίων και πλακάκια πατώματος. Η εργασία αποτελεί παράδειγμα του *πώς* να επιτυγχάνουμε μεγαλύτερα επίπεδα εφαρμογής όσον αφορά τις έννοιες του μήκους και της γωνίας. Σε αυτή την κατεύθυνση φτάνουμε μέσα από ερωτήσεις σε φυλλάδια εργασίας: απαιτούν συγκριτικές πράξεις και σχέσεις μεταξύ του γραμμικού μήκους και του γωνιακού πλάτους, καθώς και την έννοια του εύρους διακύμανσης για τις τιμές του μήκους.

Στην τρίτη πιλοτική εφαρμογή χρησιμοποιήθηκε το αυθεντικό Meccano. Σε αυτή την περίπτωση, βρίσκουμε μια επιπλέον σαφή αναφορά στα αποτελέσματα της σωματικής δράσης αναφορικά με την αναγνώριση των συστατικών του μοντέλου και τις πιθανές κινήσεις και διαθέσεις τους. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα άλλων μελετών, το υλικό επίσης αποκαλύπτει καλύτερες δυνατότητες από τον κανόνα και διαβήτη για την κατανόηση των γεωμετρικών ιδιοτήτων, όπως η τριγωνική ανισότητα. Αυτά τα στοιχεία μπορούν να εξηγηθούν λαμβάνοντας υπόψη τις απτικές και οπτικές αντιλήψεις σε ένα τρισδιάστατο περιβάλλον. Αυτά τα ωφέλη προφανώς απουσιάζουν σε ένα περιβάλλον όπου τα σχέδια είναι ήδη έτοιμα, όπως γίνεται στην παραδοσιακή διδασκαλία.

Χρήσιμες και σχετικές με το πλαίσιο προτάσεις επίσης προέκυψαν από αυτή την πιλοτική εφαρμογή: οι τρύπες που απέχουν εξίσου μεταξύ τους, ακολουθώντας το μήκος των κομματιών του Meccano, φαίνεται ότι ενθαρρύνουν τους μαθητές να

εκφράσουν το “κλείσιμο του τριγώνου” σε σχέση με τον αριθμό των τρυπών (ως ένα είδος μέτρησης) (βλέπε εικόνα 3.?). Επίσης, σχετικά με την αίσθηση της απεικόνισης, ένα ενδιαφέρον γεγονός αντιπροσωπεύεται από την ανακάλυψη της *συμμετρίας* στην διανομή των τριγώνων, που πραγματοποιείται με τον όρο “μια σταθερή πλευρά”, σχετικά με την ίδια την πλευρά. Μερικά βήματα για τη μέτρηση γίνονται με τον υπολογισμό των εμβαδών και των αναλογιών των εμβαδών.

Σε κάθε πιλοτική εφαρμογή, η έρευνα των τριγωνικών αναπαραστάσεων στον περιβάλλοντα χώρο, δηλαδή στο φυσικό περιβάλλον, όπως και στον πολιτισμικό χώρο, ξεκίνησε την πολυπολιτισμική συζήτηση. Ιδιαίτερα, η εξήγηση της σημασίας του τριγώνου στους πολιτισμούς και η έρευνα για τις σημαίες των χωρών -στις οποίες εμφανίζεται ένα τρίγωνο- αξίζει να τονιστούν.

Συμπερασματικά, εξερευνώντας την “πλατιά και βαθιά θάλασσα” των τριγώνων, εκτός από τη διαδρομή, συμμετοχή και προσεκτική παραγωγή, μπορούμε να δηλώσουμε ότι προκλήθηκε ενδιαφέρον, ακόμη και ενθουσιασμός.

Περαιτέρω ανάπτυξη της πρότασης

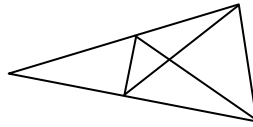
Μπορούμε να δώσουμε μερικά παραδείγματα κατευθυντήριων γραμμών φυσικής ανάπτυξης της πρότασης:

- προέκταση της μελέτης σε τετράπλευρα και άλλες κατηγορίες πολυγώνων
- κατεύθυνση σε ερωτήσεις μέτρησης (περίμετρος/εμβαδόν)
- γραπτό πρόγραμμα κατασκευής
- αναπαραγωγή της πρότασης με χρήση ΤΠΕ, όπως το GeoGebra, όπου τα “ξύλακια” γίνονται “τμήματα” σε ένα δισδιάστατο χώρο.
- εισαγωγή των κριτηρίων ισότητας και προσέγγιση της γεωμετρικής έννοιας του σχήματος, διαφοροποιώντας την “αίσθηση του φύλου” και την “αίσθηση του είδους” του.

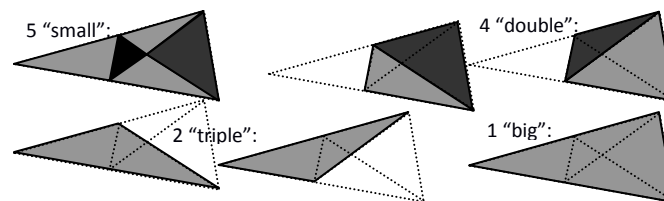
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Προβλήματα

- **“Καλά κρυμμένο”** (ερώτηση σε 21° RMT)
 - Πόσα διαφορετικά τρίγωνα μπορείς να δεις σε αυτό το σχήμα;



- **Εμπλεκόμενες διαδικασίες:** οπτικοποίηση, αναγνώριση και μέτρηση
- **Λύση**

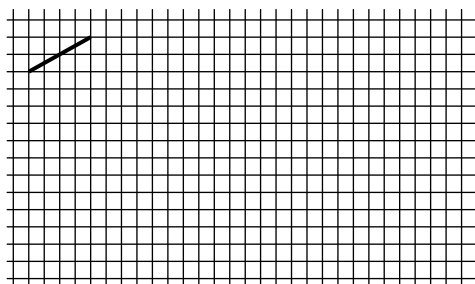


- **“Ψαλίδισμα τριγώνων (πρόβλημα στο 19° RMT)**

Βρες διαφορετικά τρίγωνα (δηλαδή που δεν επικαλύπτονται) σε αυτό το μιλιμετρέ χαρτί, ακολουθώντας τις δυο αυτές οδηγίες:

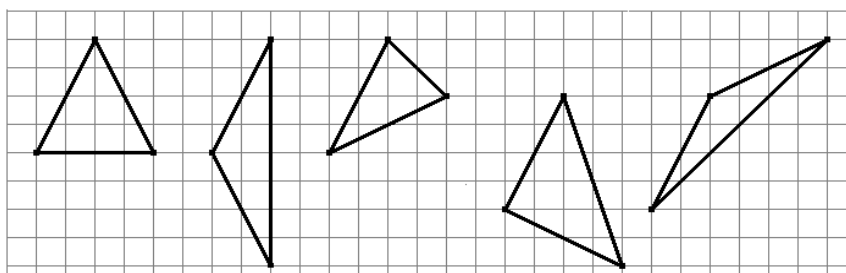
- πρέπει να έχουν δυο πλευρές με το ίδιο μήκος του τμήματος που είναι σχεδιασμένο στο παρακάτω μιλιμετρέ.
- Πρέπει να έχουν τις κορυφές τους στις κορυφές των μικρών τετραγώνων του μιλιμετρέ.

Πόσα τρίγωνα μπορείς να βρεις; Σχεδιάσέ τα και κόψ' τα.



Εμπλεκόμενες διαδικασίες: ταυτοποίηση σχήματος και μέτρησης, επαγωγή

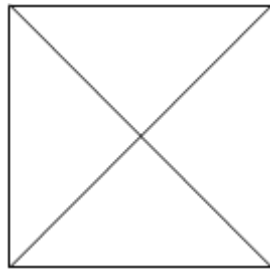
Λύση



- “Το σχεδιασμένο σχήμα”

Σε αυτό το χαρτί είναι σχεδιασμένο ένα σχήμα. Πόσα τρίγωνα με διαφορετικό σχήμα μπορείς να δεις; Μπορείς να περιγράψεις το σχήμα που βρήκες;

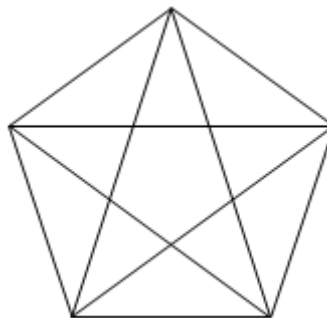
(a)



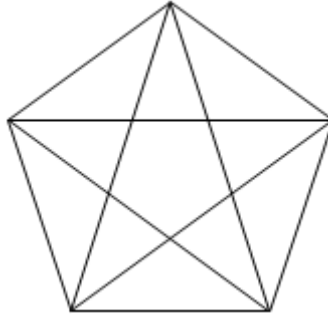
Εμπλεκόμενες διαδικασίες: ανάλυση σχήματος και κατηγοριοποίηση

Δυο πιο δύσκολες εκδοχές του προβλήματος

(b)



(c)



- “Ένα πάτωμα από τρίγωνα”

Δημιουργήστε ένα τριγωνικό πάτωμα με πλακάκια, σύμφωνα με τις προτιμήσεις σας.

Εμπλεκόμενες διαδικασίες: ανάλυση σχήματος και συνδιαστική ικανότητα