

UNA FABBRICA DI TRIANGOLI

di Maria Piccione*

INTRODUZIONE

La proposta riguarda uno degli obiettivi centrali dell'apprendimento geometrico, ovvero, la costruzione del concetto di forma triangolare con le relative proprietà fondamentali.

La centralità del tema dipende dal fatto che la *forma* delle figure geometriche, insieme alla *misura* delle estensioni (lineari, superficiali, volumetriche, angolari), costituisce l'essenza teorica della Geometria Euclidea e rappresenta un nucleo fondante del pensiero matematico. La proposta è indirizzata alla Scuola Secondaria di primo grado; essa mira ad introdurre gli studenti in un campo di conoscenza adatto allo sviluppo del pensiero razionale, come l'epistemologia della Matematica stessa riconosce e come l'insegnamento della disciplina richiede, in accordo con le direttive delle Indicazioni ministeriali.



Obiettivi

Gli obiettivi educativi della proposta possono essere distinti in cognitivi, metacognitivi e affettivi.

* Dipartimento di Ingegneria della Informazione e Scienze Matematiche, Università di Siena, Italia

Obiettivi cognitivi:

- Sviluppare processi di visualizzazione
- Attuare processi di matematizzazione
- Strutturare il concetto di costante/variabile in una classe di elementi
- Sviluppare le abilità di rappresentazione grafica
- Sviluppare il linguaggio, da quello comune a quello disciplinare
- Costruire il concetto di forma triangolare
- Trovare la condizione di esistenza (“disuguaglianza triangolare”) e le condizioni di unicità per i triangoli

Obiettivi metacognitivi:

- Sviluppare la consapevolezza della relazione agire-comprendere
- Sviluppare la consapevolezza della relazione conoscere-spiegare

Obiettivi affettivi:

- Generare senso di auto-efficienza e auto-stima
- Suscitare il piacere di fare/osservare/scoprire

Cenni sul metodo e sul progetto

L'educazione geometrica deve riferirsi ed enfatizzare le relazioni *soggetto-spazio reale e soggetto-oggetti concreti*, in particolare dall'inizio del percorso educativo fino al livello medio. Punti, segmenti, triangoli e altre entità - delle quali la disciplina si occupa - non sono oggetti concreti, ma entità concretamente rappresentabili o costruibili attraverso disegni o materiali strutturati. Una prospettiva metodologica basata sulla interazione con la realtà fornisce una base efficace per lo stadio intuitivo dei processi cognitivi e delle applicazioni teoriche.

Attualmente, i progressi nelle neuroscienze e nelle scienze cognitive permettono di dare credito scientifico a quelle affermazioni che finora erano solo intuizioni educative, sebbene sperimentalmente provate. Inoltre, l'*enattivismo*¹, una teoria generale della conoscenza connessa alla biologia e a filosofie della esperienza, sta influenzando l'educazione attraverso la definizione del *modello enattivo*, il quale evidenzia la *costruzione concettuale* come una *attività ambientata e incorporata*. Il metodo di apprendimento attivo introdotto da Emma Castelnuovo risulta coerente con il quadro di riferimento citato e viene adottato in questa proposta, coinvolgendo parte del relativo materiale concreto e della modalità d'uso.

Il contesto di apprendimento è centrato sull'uso di modelli dinamici, realizzati mediante elementi di un semplice materiale: un “Meccano geometrico” - costituito da

¹La teoria prende avvio dai contributi dei biologi Maturana e Varela (1984); viene esplicitamente introdotta da Varela, Thompson e Rosch (1991).

asticelle, di colori e lunghezze diverse (realizzate in plastica, legno o metallo), aventi fori alle estremità oppure aventi fori distribuiti ad eguale distanza lungo esse - gancetti e nastri² (Foto 1).



Foto1. Il materiale per l'attività

Il lavoro è organizzato in modo da condurre i ragazzi ad avere esperienze sensorio-motorie dell'oggetto "triangolo" e a sviluppare il linguaggio - in forma scritta o orale - nella descrizione di ciò che viene da loro fatto e visto. Inoltre, l'argomento permette una visione multiculturale sulla conoscenza e sulla tecnologia umana.

L'attività si realizza:

- a coppie o in piccoli gruppi, durante la costruzione di figure dinamiche, l'analisi delle produzioni, il disegno, la stesura di osservazioni o commenti;
- a classe intera, nei momenti di discussione/confronto dei risultati ottenuti.

La proposta è articolata in tre sessioni:

- Sessione 1, con funzione introduttiva;
- Sessioni 2 e 3, con funzione costruttiva di un percorso cognitivo graduato, dall'idea di figura trilatera al concetto di triangolo, fino ai criteri di congruenza. Ciascuna di esse è strutturata secondo passi ordinati.

ANALISI A PRIORI

La proposta è progettata per fronteggiare gli urgenti e complessi problemi educativi che si presentano in una classe multiculturale, in particolare:

- aumento delle differenze fra individui (derivanti da cultura di origine, precedenti esperienze scolastiche, sistemi educativi, livelli di sviluppo relazionale, cognitivo e di conoscenza della lingua come L2 ...)
- forme di difficoltà (che si manifestano con comportamenti quali isolamento, sfiducia o indifferenza per le attività scolastiche e incapacità di concentrazione/partecipazione adeguata)

²È una pratica efficace far realizzare le aste dagli studenti stessi, seguendo istruzioni scritte.

L'idea seminale del lavoro è la realizzazione di un ambiente di apprendimento che favorisca l'azione e l'esperienza individuale in un contesto sociale, fornendo strumenti adatti a ridurre le istruzioni verbali.

Lo scopo educativo risiede nel permettere a ciascuno di realizzare processi cognitivi, anche in presenza di difficoltà linguistiche e, inoltre, di ancorare lo sviluppo del linguaggio all'esperienza e alla collaborazione tra pari.

La scelta del materiale e il suo uso mirano espressamente a supportare il processo di generazione delle immagini mentali, necessario per la rappresentazione concettuale. Per quanto riguarda gli *schemi-immagine*³, la gran parte del lavoro si avvale dello *schema-contatto*.

Sperimentazione principale

di Maria Piccione

L'ATTUAZIONE

Questa proposta è stata messa in atto in due classi prime della Scuola Secondaria di primo grado "Gandhi" (Firenze). Le due classi campione hanno coinvolto, rispettivamente, 22 studenti (6 immigrati e 5 con problemi di apprendimento) e 21 studenti (7 immigrati e 5 con problemi di apprendimento), 2 insegnanti (A. Scialpi e G. Sallustio) con la collaborazione del trainer.

La proposta è stata inizialmente descritta dal trainer e discussa con i due insegnanti delle classi coinvolte.

Il lavoro è stato effettuato nelle seguenti tre sessioni.

Sessione 1: Familiarizzando con il materiale (*1 ora e mezzo*)

Presentazione del "Meccano geometrico"

I ragazzi delle due classi sono stati riuniti in una ampia sala. Poiché l'attività doveva essere svolta mediante un materiale strutturato, nuovo per i ragazzi, il primo passo ha riguardato la sua presentazione e il modo d'uso.

Prime composizioni libere

L'attività ha avuto luogo in piccoli gruppi di studenti (3-4), disposti intorno a banchi ravvicinati.

A ciascun gruppo di studenti è stato distribuito un insieme di asticelle (15-20) e ganci con i compiti di realizzare composizioni, scegliendo liberamente e congiungendo aste fra loro e quindi di riprodurre graficamente le più belle strutture ottenute. Alla fine del lavoro i disegni sono stati collezionati dall'insegnante.

³³cfr. Núñez et al. (1999)

Sessione 2: Allestimento del contesto motivazionale(4ore)

Riflessione sul lavoro(30 minuti)

Questo lavoro è stato svolto nella sala teatro - provvista di schermo e proiettore - con i ragazzi delle due classi seduti in platea.

All'inizio, ogni studente ha ricevuto tre aste e ganci per la congiunzione ed è stato invitato a:

- osservare la figura da lui/lei composta;
- cercare nella mente – a occhi chiusi – immagini di oggetti triangolari dal mondo reale;
- scrivere il nome e disegnare l'oggetto immaginato su un foglietto di carta.

Alla fine, l'insegnante ha commentato i vari esempi emersi di figure composte o immaginate ed ha raccolto il materiale prodotto.(Foto 2).

Proiezione commentata (30 minuti)

Un'ampia selezione di foto è stata proiettata sulla schermo, in modo da suscitare la consapevolezza in ciascun ragazzo della quantità di triangoli che si possono trovare nel mondo reale. (Foto 3)

Successivamente, le attività si sono svolte in parallelo, a classi separate.



Foto 2



Foto 3

Navigazione in Internet(1 ora)

Nel laboratorio informatico, i ragazzi divisi in piccoli gruppi, con la guida dell'insegnante, sono stati invitati a cercare siti internet riguardanti triangoli e a realizzare una collezione delle immagini preferite.

Panoramica multiculturale(1 ora)

L'insegnante ha messo in evidenza l'uso diffuso della "triangolazione" in ogni cultura e in ogni tempo della storia umana, discutendo alcuni esempi significativi (strumenti quotidiani, primi edifici, strutture architettoniche, procedimenti di misura e mappatura, espressioni artistiche ...)

Da questo lavoro è scaturita la curiosità sulle ragioni del successo della forma triangolare, alla quale l'insegnante ha risposto fornendo spiegazioni (stabilità della

struttura triangolare, utilizzo nell'attività di rilevazione di edifici/terreni, valore estetico ...)

Due esperimenti(1 ora)

In collaborazione con l'insegnante di Educazione Tecnica, sono stati effettuati due esperimenti:

- verifica della stabilità della struttura triangolare, provando a comprimere modelli reali, anche realizzati mediante piegatura della carta;
- mappatura dell'aula attraverso l'uso di un rilevatore di distanza. L'ambiente aveva approssimativamente forma rettangolare e gli studenti hanno potuto capire e apprezzare la necessità di rilevare almeno una linea diagonale per poter realizzare la mappa. Una verifica con un quadrilatero articolato (realizzato con le aste) ha evidenziato che l'unicità della configurazione si ottiene fissando due vertici opposti mediante un'ulteriore asta.

Sessione 3. Costruzione concettuale e sviluppo del linguaggio(Durata: 3ore)

L'attività è stata organizzata in piccoli gruppi di studenti (3-4) e si è svolta attraverso passi successivi di complessità crescente.

Condizioni di esistenza di un triangolo(1 ora)

Ciascun gruppo di ragazzi è stato provvisto di due diverse terne di aste, consegnate in due tempi diversi: il compito era rappresentato dal combinare i pezzi a disposizione in modo da scoprire che:

1. la prima terna portava alla realizzazione di *esattamente una* figura “chiusa” (esspressamente, un triangolo!)
2. la seconda terna consentiva la realizzazione di *una grande quantità* di figure “aperte”(Foto 4)

Un ragazzo in ciascun gruppo aveva assunto il ruolo di “reporter” con l'utile compito di registrare graficamente le figure ottenute in ciascuna situazione.

Durante l'attività, l'insegnante ha osservato le azioni *spontanee* eseguite dai ragazzi di ciascun gruppo, le comunicazioni verbali e la terminologia usata (come “stecca” o “lato”, “aperto”, “chiuso”, “spazio”, “proporzione”, “somma”, “lunghezza” ...). Successivamente, gli studenti di ogni gruppo sono stati invitati a commentare l'esperienza fatta, rispondendo alla richiesta “*Io vedo che ...*”: il materiale raccolto è stato prezioso per una analisi delle osservazioni esposte.

L'insegnante ha infine impegnato i ragazzi nella soluzione del seguente problema finalizzato a lavorare sulla condizione di esistenza di un triangolo e sul numero di triangoli realizzabili a partire da un insieme di lati assegnato:

<Ibrahim mette sul suo banco cinque bastoncini di lunghezze diverse: 4 unità; 5 unità; 6 unità; 9 unità; 11 unità. Quanti triangoli diversi può costruire? Spiega tutte le possibilità.>

(problema adattato da “Triangoli e bastoncini”, 21° Rally Matematico Transalpino, e riferito al nome di uno studente)

Costruzione di triangoli con un elemento dato (lato/angolo) (1 ora)

L'insegnante ha proposto ai ragazzi di usare bastoncini (cordicelle o elastici) per costruire triangoli, dapprima assegnando un lato (poi, un angolo) e li ha lasciati lavorare. Ha quindi avviato una discussione tra i gruppi attraverso la domanda:

- *Quali elementi potete cambiare attraverso il movimento?*

Costruzione di triangoli con due elementi dati (lato&angolo/lato&lato/angolo&angolo) (1 ora)

Durante questa sessione l'insegnante ha chiesto agli studenti di disporre il materiale in modo da costruire triangoli a partire da un lato e un angolo fissati (il lavoro è stato ripetuto fissando due lati e infine due angoli). I ragazzi dovevano costruire, osservare e rappresentare graficamente alcune delle configurazioni realizzate. (Foto 5)

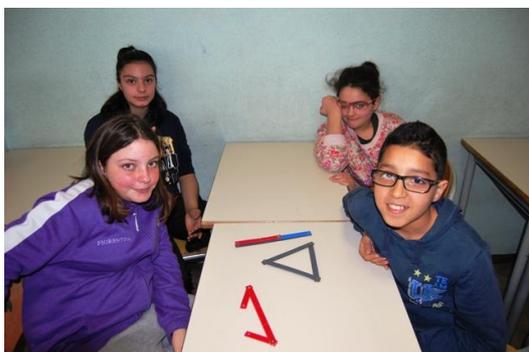


Foto 4



Foto 5

Due domande hanno qui creato una situazione problematica:

- *Cambia qualcosa se fissiamo un altro angolo?*
- *Cambia qualcosa se fissiamo un altro lato?*

I commenti sono stati raccolti e organizzati.

Definizioni

Questa attività ha costituito la base esperienziale per una più consapevole descrizione verbale di alcune forme triangolari particolari e per la condivisione di termini disciplinari (triangolo isoscele, retto, equilatero, scaleno; lati/angoli consecutivi; angolo opposto a lato). Inoltre, è stato chiesto ai ragazzi di immaginare triangoli appartenenti ad una classe indicata e di descrivere le possibili differenze tra elementi di ciascuna classe.

Problem solving

La fase del problem solving è stata messa in atto per verificare l'acquisizione di abilità nel riconoscimento di triangoli (testi in Appendice).

ANALISI A POSTERIORI

Vari risultati e indicazioni didattiche sono stati tratti dall'attività svolta; mettiamo in evidenza qui i più rilevanti, anche allo scopo di valutare se e come la proposta risponda agli obiettivi prefissati.

- Potenzialità del “Meccano geometrico” nel processo di matematizzazione

L'attività ha mostrato che il materiale proposto, con le modalità d'uso descritte, è in grado di favorire la ricostruzione individuale interna di operazioni esterne. Argonteremo solo l'influenza del materiale nella scoperta della “disuguaglianza triangolare”. Le aste si sono rivelate un *artefatto* in grado di evolvere nel concetto di “segmento”, concetto rappresentato dal *segno* linguistico “lato”. È interessante osservare che, nella pratica, le tre stecche sono state percepite con ruoli diversi: i ragazzi hanno teso a considerare, per prima, l'asticella con le estremità fissate – che hanno chiamato “base” – per passare, successivamente, alle altre due aventi certi gradi di libertà – denominate “residue”. Il ruolo delle “residue” è apparso fondamentale per il riconoscimento dell'esistenza di una relazione tra gli elementi in gioco, dalla quale la “chiusura della figura” dipende. Questo riconoscimento ha indotto un processo cognitivo spontaneo, la cui traccia si riscontra nelle parole usate dagli studenti, quali “corto/medio/lungo”, “proporzionato/sproporzionato”, “differenti/uguali” – e, di conseguenza, nelle espressioni facenti riferimento a confronti basati su interpretazioni metriche. È emerso che i passi fondamentali di questo processo corrispondono ai due casi particolari: triangolo equilatero e triangolo degenere. Già il primo caso riconduce la condizione di chiusura al concetto di “lunghezza uguale” dei lati; ma è il secondo caso – quello inatteso – che ha rivelato una funzione potente nel promuovere l'interpretazione della condizione di chiusura in termini di “lunghezza” e “somma di lunghezze”, ovvero nella matematizzazione dei fatti osservati.

- Strumenti per l'individuazione di competenze logico/geometriche

Due esempi:

1. incapacità di distinguere le configurazioni trilatero chiuso-trilatero aperto in termini di quantificatori
2. incapacità di dedurre il corrispondente criterio di congruenza dalla possibilità di costruire un unico triangolo, sotto certe condizioni.

- Strumenti per la valutazione di discrepanze cognitive tra i ragazzi della classe

Esempi di due casi limite:

1. incapacità di riprodurre graficamente una certa configurazione di aste (esagono intrecciato)
2. capacità di elaborare correttamente la descrizione di una procedura combinatoria (nel problema “Triangoli e bastoncini”).

- Adeguatezza del contesto di apprendimento rispetto ai problemi tipici della classe multiculturale

Ogni studente è messo in condizione di prendere parte alle attività didattiche, almeno a quelle di esplorazione tattile e visiva di oggetti reali e di espressione grafica.

- Sviluppo del linguaggio

Le trasformazioni ottenute dalla manipolazione di una figura concreta guidano il soggetto - in situazione di collaborazione tra pari - a *dire/cercare di dire ciò che sta facendo* e così a sviluppare il linguaggio e a metterlo alla prova (possesso/mancanza di parole, uso proprio/improprio, uso vago/rigoroso ...).

- Influenza sulle componenti emotive individuali

Gli studenti sono stati realmente attratti dall'attività. Hanno lavorato con piacere e mantenuto l'attenzione per lunghi tempi di applicazione. Tra i comportamenti, l'esempio più eclatante è stato quello di una ragazzina cinese che, dal totale rifiuto di ogni attività scolastica, alla fine ha dato segni di disponibilità alla partecipazione.

- Influenza sulla formazione degli insegnanti

Al momento, ci sono quattro insegnanti della scuola impegnati in un percorso di revisione del curriculum di Matematica e di rinnovamento dell'impostazione didattica.

Bibliografia

- Bartolini Bussi, M. G. & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective, in L. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (second edition), Routledge.
- Castelnuovo, E. (2008). *L'officina matematica: ragionare con i materiali*. F. Lorenzoni (Ed.). Molfetta: La Meridiana.
- Coin, F. (2013). Didattica enattiva: cos'è e cosa può fare. *Formazione e Insegnamento* XI, 4 (127-133). Brescia: Pensa Multimedia.
- Furinghetti, F., Matos, J. M. & Menghini, M. (2013). From mathematics and education, to mathematics education. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (273-302). Dordrecht: Springer.
- Furinghetti, F. & Menghini, M. (2014). The role of concrete materials in Emma Castelnuovo's view of mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics* **87** (1-6). Dordrecht: Springer
- Núñez, R. E., Edwards, L. D. & Matos, J. F. (1999). *Embodied Cognition as Grounding for Situatedness and Context in Mathematics Education*. *Educational Studies in Mathematics* **39**:(45-65). Dordrecht: Springer.
- Rossi, P.G. (2011). *Didattica enattiva. Complessità, teorie dell'azione, professionalità docente*. Milano: Franco Angeli

<http://www.di.ens.fr/~longo/geocogni.html>

Seconda sperimentazione

di Hana Moraova **

Sperimentazione

Praga, 27 Maggio 2014, 4 lezioni successive, 7° grado, CLIL

Il gruppo ceco ha adattato l'unità didattica senese in modo da renderla significativa nel contesto della scuola dove è stata pilotata. Essa è stata sperimentata in una classe II della Scuola Secondaria di primo grado "ZŠ Fr. Plamínkové", a Praga. Poiché nella classe non sono inclusi alunni immigrati, l'attività è stata condotta in lingua inglese secondo la metodologia CLIL (Content and Language Integrated Learning) al fine di simulare un ambiente in cui gli studenti non abbiano familiarità con la lingua di insegnamento. La sequenza delle lezioni è stata svolta in un solo giorno.

Pianificazione dell'esperienza didattica

L'insegnante ha preliminarmente analizzato e quindi adattato l'unità didattica italiana alle condizioni di una scuola ceca. Il primo ostacolo incontrato dall'insegnante è stata la non disponibilità, nelle scuole ceche, del kit del materiale didattico utilizzato in Italia. Di conseguenza, è stato previsto l'utilizzo di asticelle di legno, non articolabili.

Inoltre, è stato pianificato di curare con molta attenzione l'introduzione della terminologia inglese nell'ambito della teoria dei triangoli (angolo retto, ottuso, acuto, triangolo equilatero, isoscele, scaleno, etc.).

Poiché l'esperimento didattico è stato organizzato in un solo giorno, è stato anche necessario ideare attività che permettessero agli alunni momenti di distensione e divertimento. Per questo motivo, l'insegnante ha deciso di proporre ai ragazzi l'uso dei telefoni cellulari per scattare foto di oggetti triangolari presenti nell'edificio scolastico. Questo permesso e l'attività correlata si sono rivelati assai motivanti.

Attuazione dell'esperienza didattica

1. L'insegnante ha fornito agli alunni una certa quantità di asticelle di legno, chiedendo di realizzare bastoncini di diverse lunghezze: 4,5,6,9 e 11 cm; quindi, li ha invitati a costruire il maggior numero possibile di triangoli (Foto 1.). Questa attività aveva l'obiettivo di avviare gli studenti alla formulazione della proprietà della *disuguaglianza triangolare*. La difficoltà riscontrata con l'utilizzo dei bastoncini, e l'efficacia del lavoro stesso, sono state rappresentate dall'impossibilità di collegare i loro estremi: di conseguenza, alcuni allievi hanno realizzato un triangolo anche nel caso in cui la somma delle lunghezze di due bastoncini uguagliava quella del terzo. Questo

** Charles University in Prague, Czech Republic

ha richiesto l'intervento dell'insegnante, che ha richiamato ad un'esecuzione accurata dell'accostamento per evitare di trarre conclusioni errate.

2. L'intera classe ha enunciato la proprietà della disuguaglianza triangolare in Inglese. Gli insegnanti hanno controllato la comprensione.
3. Gli studenti hanno ricevuto una scheda di lavoro con una serie di esercizi finalizzati a verificare la proprietà in esame e applicare la condizione da essa espressa per stabilire l'esistenza o meno di un triangolo di lati assegnati. Questa è stata l'attività che ha richiesto più calcoli e limitato lo scambio verbale e il ragionamento in gruppo, esercizio comunque molto importante in una situazione in cui tutti gli alunni non hanno il dominio della lingua usata per la comunicazione.
4. La parte successiva della lezione, è stata dedicata all'introduzione della terminologia relativa alle proprietà fondamentali dei triangoli (scaleno, isoscele, equilatero, ottusangolo, acutangolo, rettangolo). Attraverso una presentazione in PowerPoint, l'insegnante ha dapprima introdotto i nuovi termini, associandoli ad illustrazioni esemplificanti le varie tipologie; poi, ha presentato alcune immagini di triangoli e ha coinvolto gli allievi in un'attività comune di classificazione.

Al termine di questo lavoro, gli allievi sono stati invitati a fare una sorta di gioco, che ha previsto:

- ritaglio di triangoli di varia forma, da fogli di carta, da parte dei ragazzi (Foto 2);
- raccolta delle figure ritagliate e redistribuzione casuale ai ragazzi della classe, da parte dell'insegnante;
- esame individuale di ogni singolo esemplare ricevuto e attribuzione scritta del nome rappresentativo della categoria di appartenenza (ad esempio, acuto, isoscele, ...).



Foto 1



Foto 2

5. Avendo acquisito la terminologia di base, l'esperienza ha potuto rivolgersi all'aspetto culturale dell'unità didattica. In primo luogo, sono state presentate immagini in architettura - corredo del progetto senese - ed avviata una

discussione di classe su dove e come i triangoli erano usati nelle varie strutture (ad esempio, nel famosissimo Teatro dell'Opera di Sydney, Foto 3). Anche la presenza di triangoli in vari simboli è stato mostrato e discusso (Foto 4). Ha fatto seguito la fase in cui è stato permesso agli studenti di prendere i loro telefoni cellulari per scattare foto ai vari oggetti aventi forma triangolare, individuati andando in giro per la scuola. Questa parte dell'esperienza si è rivelata molto creativa e motivante. Gli alunni si sono mostrati più che disposti a cercare e hanno trovato triangoli nei posti più impensati (Foto 5 e 6). Le immagini sono state scaricate dai telefoni cellulari sul computer e presentate utilizzando un proiettore in modo che tutta la classe potesse condividere la raccolta. Gli alunni sono stati invitati a classificare i vari triangoli utilizzando la terminologia acquisita. Dal lavoro sono emersi misconcetti, che hanno dato l'occasione di precisare alcune idee (per esempio, Foto 7, gli alunni hanno fotografato un "diagramma a torta", sostenendo che vi fossero triangoli, trascurando il fatto che, in un settore, uno dei lati è un arco).



Foto 3



Foto 4



Foto 5

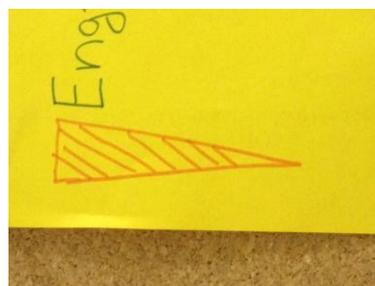


Foto 6

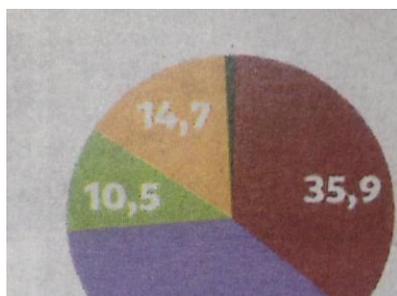


Foto 7

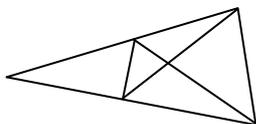


Foto 8

6. Nella parte successiva, l'attività didattica ha di nuovo seguito un'indicazione della proposta originaria: è stato chiesto agli alunni di disegnare una piastrellatura triangolare per un pavimento (Foto 8).

7. Nell'ultima parte, l'attenzione è stata riportata su aspetti disciplinari. L'attività è iniziata dal problema "Ben nascosto", con la domanda (in 21° RMT):

Quanti triangoli diversi puoi vedere in questa figura?

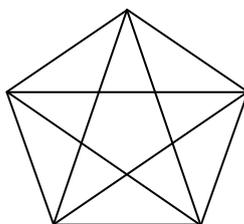


Poi sono state prese in esame altre figure: la stella a cinque punte, la stella a sei punte (esagramma, ovvero, Stella di David) e le rappresentazioni triangolari sulle bandiere nazionali (trovate attraverso una ricerca in Internet).

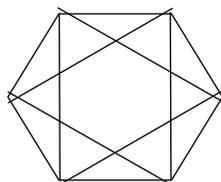
Gli alunni hanno iniziato da un problema, analogo al precedente, di individuazione di triangoli:

Quanti triangoli ci sono?

(a)



(b)



per passare alla costruzione di queste figure stellate, sia attraverso il disegno geometrico, che con la piegatura della carta.

Analisi a posteriori dell'esperimento didattico

L'unità didattica ha dimostrato di essere ben progettata. Essa combina tradizione e fantasia, matematica e cultura, rappresentazione grafica e calcolo, manipolazione di oggetti ed elaborazione di congetture e scoperta di proprietà. Gli studenti sono stati motivati e attivi. In modo particolare, hanno apprezzato l'uso della tecnologia mobile e il lavoro creativo della realizzazione del "proprio" pavimento.

Terza sperimentazione

di Marie-Hélène Le Yaouanq^{***} e Brigitte Marin^{***}

INTRODUZIONE

La terza sperimentazione è stata condotta dal signor Paulou, un insegnante di Matematica della Scuola Secondaria di I grado "Roger Martin du Gard", situata in un'Area di Educazione Prioritaria (Zone d'Éducation Prioritaire), al grado 7.

Le nozioni connesse al concetto di triangolo nel 7° anno del curriculum sono: disuguaglianza triangolare e area. La congruenza tra triangoli non è contemplata nel curriculum. Tuttavia, nel corso dell'attività, gli studenti sono stati indirizzati a osservare che, nella costruzione di un triangolo, se un lato viene fissato, si possono realizzare tanti triangoli (infiniti!), simmetrici a due a due rispetto all'asse del lato considerato.

L'ATTUAZIONE DELLA PROPOSTA

Due fasi hanno costituito lo sviluppo del lavoro.

FASE 1. Disuguaglianza triangolare

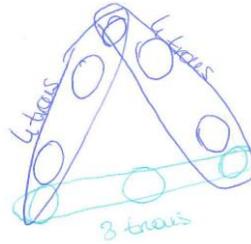
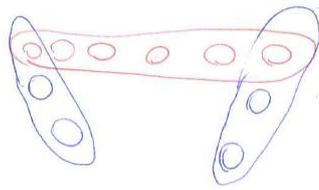
La sessione di esplorazione è stata suddivisa in tre passi.

Passo 1. Una fase attiva è stata svolta utilizzando componenti del «Meccano», un gioco di costruzione provvisto di aste di plastica, di lunghezze diverse, che possono essere collegate tra loro mediante bulloni. Agli studenti, divisi in gruppi, sono state consegnate aste di varia lunghezza con le quali essi hanno dovuto cercare di costruire il maggior numero possibile di triangoli.



Inoltre, per tenere traccia delle varie realizzazioni ottenute, essi le hanno riprodotte su fogli di carta.

^{***} UPEC University, ESPE, Créteil (France).



Passo 2. L'insegnante ha promosso un'attività collettiva finalizzata ad organizzare un inventario dei triangoli costruibili o non costruibili.

Passo 3. L'insegnante ha proposto un gioco: gli studenti dovevano indovinare se un ragazzo potesse costruire o no un triangolo con una certa terna di lati a lui assegnata. L'insegnante è intervenuto solo per regolare il confronto verbale di idee tra i ragazzi. Questa attività ha mostrato quanto sia difficile per i ragazzi trovare formulazioni adeguate con un lessico più evoluto rispetto a quello spontaneamente emerso in espressioni del tipo: *"lo spazio non è troppo grande"*, *"le lunghezze si chiudono"*, ecc (Margolinas, 2010).

D'altra parte si può osservare che, alla fine della sessione, l'esperienza ha consentito a tutti gli studenti di elaborare un metodo di decisione per la costruibilità di un triangolo.

Le sessioni successive sono state dedicate a formulare proprietà e a ri-applicarle in modo da:

- evidenziare la loro validità,
- mostrare i diversi triangoli realizzabili col materiale
- verificare, per sovrapposizione, l'eventuale uguaglianza tra coppie di esemplari ottenuti.

È noto dalla letteratura che gli studenti spesso incontrano difficoltà a trattare il caso del triangolo degenerare nella costruzione con riga & compasso (in particolare, evitano il disegno di triangoli "appiattiti", ad esempio con lati di lunghezze 4, 5, 9); analoghe difficoltà non sono emerse durante l'attività con le aste, poiché nel caso in esame, la manipolazione porta direttamente alla sovrapposizione delle aste.

FASE 2. Presenza della forma triangolare nel mondo reale

Gli studenti sono stati invitati ad effettuare una ricerca sulle bandiere nazionali di diversi paesi, nelle quali appare un triangolo. Dovevano poi sceglierne una e di essa realizzare:

- una descrizione della struttura da un punto di vista geometrico;
- una rappresentazione grafica;
- una interpretazione del significato dei vari elementi costitutivi in relazione al paese rappresentato (forme, colori, ...).

Gli studenti si sono dedicati a questa attività in coppia, fuori dall'orario scolastico; con i dati raccolti ed elaborati hanno redatto un testo scritto da presentare in classe. Gli studenti hanno partecipato al lavoro con entusiasmo e realizzato produzioni particolarmente accurate.

Il lavoro è stato completato da calcoli di aree e di rapporti tra aree di figure presenti sul disegno della bandiera rispetto a quella del triangolo e dall'espressione di tali rapporti in termini di percentuali. Durante questa fase, sono apparsi vari possibili sviluppi del lavoro, anche a carattere informatico (scrittura di programmi di costruzione) o interdisciplinare.

Bibliografia

Margolinas, 2010, Un point de vue didactique sur la place du langage dans les pratiques d'enseignement des mathématiques

<https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-00470238/document> (retrieved on 01/05/2015)

Conclusioni dalle tre sperimentazioni

di Maria Piccione

L'intero esperimento combina due componenti: "*che cosa*" e "*come*" riguardanti, rispettivamente, la scelta di un oggetto di conoscenza da trattare e una possibile modalità di trattazione di questo in una classe multiculturale. In altri termini, esso fornisce sia una serie di indicazioni pratiche, che un modello di insegnamento. I risultati ottenuti ci incoraggiano a proseguire in questo lavoro.

Alcune scelte di lavoro effettuate e comportamenti manifestati dagli alunni durante i pilotaggi, meritano di essere evidenziati per il loro valore matematico e i positivi riscontri.

Nel secondo pilotaggio, il materiale usato è costituito da semplici stecchini di legno, avvicinati tra loro: esso ha comunque permesso agli studenti di compiere un'esperienza sensoriale di configurazioni triangolari, fondamentale per l'attività successiva sulla disuguaglianza triangolare. Inoltre, ulteriori attività come ritaglio/piegatura di carta, progettazione di figure - anche complesse - "triangolate" e pavimentazioni a tessere triangolari hanno sostenuto l'impostazione euristica del lavoro. Il lavoro ha dato anche un esempio di come raggiungere livelli più elevati di applicazione, concernenti i concetti di lunghezza e ampiezza angolare. Il percorso può essere seguito attraverso le domande poste nelle schede di lavoro: esse richiedono operazioni di confronto e di individuazione di relazioni tra lunghezze e ampiezze angolari, come pure riguardano il concetto di campo di variazione per i valori di un insieme di lunghezze.

Nel terzo pilotaggio, è stato utilizzato il Meccano originale. L'esperienza ha fornito un'ulteriore prova esplicita degli effetti dell'azione fisica sul riconoscimento degli elementi costitutivi del modello, dei loro movimenti e disposizioni possibili. In accordo con i risultati di altri studi, il materiale ha rivelato anche migliori potenzialità degli strumenti riga-e-compasso, per la comprensione di proprietà geometriche, come la disuguaglianza triangolare. Ciò dipende dall'effetto sulle strutture cognitive delle percezioni tattili e visive realizzate in ambiente tridimensionale. Di conseguenza, l'esperienza apre una riflessione sui contesti di apprendimento dove questa sollecitazione sia mancante. Inoltre, da questo pilotaggio è emerso un rilevante suggerimento: i fori equidistanti, lungo i pezzi del Meccano, hanno mostrato la potenzialità di indurre gli alunni ad esprimere la "chiusura del triangolo" in termini di numero di fori (come in una sorta di misura). Per quanto riguarda i processi di visualizzazione, un punto di interesse è stato la scoperta della simmetria nella distribuzione dei triangoli, realizzabili sotto la condizione "un lato fisso", rispetto a questo lato.

In ciascuna sperimentazione, la ricerca di rappresentazioni triangolari nell'ambiente circostante, sia nel mondo della natura che in quello delle espressioni dell'attività umana, ha dato luogo ad una discussione multiculturale. Meritano di essere sottolineate la spiegazione del significato del triangolo nelle varie culture e la ricerca di esso negli emblemi dei vari paesi.

Le esplorazioni del "mare largo e profondo" dei triangoli, lungo i vari percorsi, ha suscitato tra i ragazzi interesse e perfino entusiasmo, determinando partecipazione attiva e produzioni accurate.

Ulteriori sviluppi della proposta

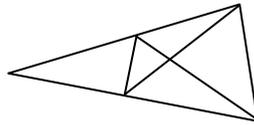
La proposta possiede linee naturali di sviluppo facilmente individuabili:

- introduzione dei criteri di similitudine ed avvio al concetto geometrico di forma, nei suoi due sensi, "genere" e "specie";
- estensione dello studio ai quadrilateri e ad altre classi di poligoni;
- passaggio a problemi di misura (perimetro/area);
- elaborazione di programmi di costruzione geometrica;
- riproduzione del percorso mediante l'uso di TIC, come GeoGebra, dove le "asticelle" diventano "segmenti" dello spazio bidimensionale.

APPENDICE

Problemi

1. **Quanti triangoli diversi riesci a trovare in questa figura?**(quesito tratto da "Ben nascosto", 21° RMT)



Processi coinvolti: visualizzazione, riconoscimento, conteggio.

2. **Quanti triangoli riesci a vedere in ciascuna delle figure seguenti? prova ad indicare di che tipo sono.** (quesito tratto da "La figura spezzata")

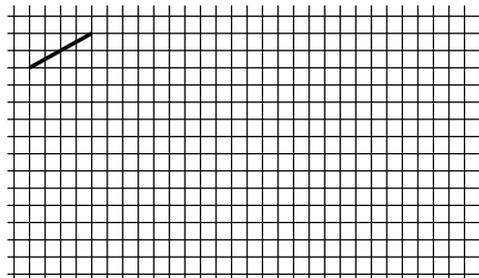
Processi coinvolti: visualizzazione, riconoscimento, conteggio

3. **Greta disegna dei triangoli su un foglio quadrettato e poi li ritaglia. Tutti i suoi triangoli hanno:**

- due lati della stessa lunghezza di quella del segmento disegnato in figura;
- tutti i vertici in punti di intersezione della quadrettatura.

Quanti triangoli differenti (cioè non esattamente sovrapponibili dopo averli ritagliati) può aver ottenuto Greta?

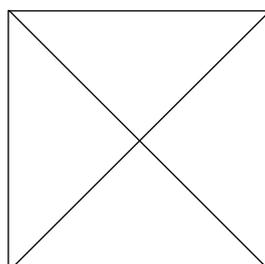
Disegnateli tutti utilizzando la quadrettatura qui sotto e poi ritagliateli.
(problema "Ritaglio di triangoli", in 19° RMT)



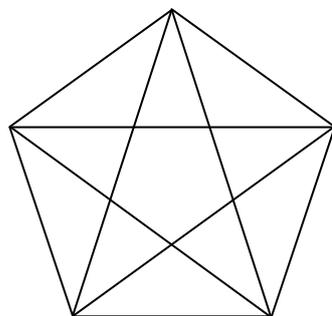
Processi coinvolti: individuazione di forme e misure; deduzione

4. **Osserva la figura qui disegnata. Quanti triangoli di forma diversa riesci a vedere in essa? Quali forme puoi riconoscere?**(problema "La figura composta", in tre versioni A-B-C di difficoltà crescente)

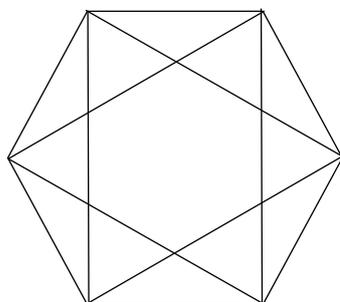
(a)



(b)



(c)



Processi coinvolti: analisi di forme e classificazione

5. Costruisci un pavimento fatto di piastrelle triangolari, seguendo la tua fantasia e il tuo gusto. (problema "Un pavimento fatto di triangoli")

Processi coinvolti: analisi della forma e combinazioni