

TREKANTFABRIKKEN

ved Maria Piccione*

INTRODUKSJON

Dette forslaget til opplegg er relatert til et av de grunnleggende emnene i geometrien, nemlig til trekanten med dens egenskaper og forhold, og til ulike forestillinger om trekantformen.

Formen til geometriske figurer er viktig som basis for matematisk tenkning, og i sammenheng med forstørrelse og forminskning er trekanten et karakteristisk objekt i Euklidsk geometri. Trekantformen er et av emnene i matematikk i på mellomtrinnet som er målgruppe for dette opplegget. Dette undervisningsopplegget tar elevene med inn i et område i matematikken som kan gi grunnlag for utvikling av rasjonell tenkning noe som er i samsvar med matematisk epistemologi, som kreves i undervisningen av matematikk, og som også er i samsvar med offisielle retningslinjer.



Mål

De pedagogiske målene for dette opplegget kan bli delt inn i kognitive, metakognitive og følelsesmessige mål.

Kognitive mål er å:

* Department of Information Engineering and Mathematics, University of Siena, Italy

- forbedre evnen til visualisering
- kunne gjøre om til matematisk språk/uttrykk
- ordne konstanter/variabler i grupper av elementer
- fremme kombinatorisk tenkning
- utvikle ferdigheter i grafisk framstilling
- utvikle språket fra dagligspråk til fagspråk
- forstå trekanten som et matematisk begrep
- finne ut hva som er eksistensbetingelsene for en trekant (“trekantulikheten eller triangelaksiomet”) og betingelser for de spesielle trekantene.
- identifisere kriteriene for at trekanter er kongruente

Metakognitive mål:

- Å utvikle forståelse for forskjellen mellom det å gjøre og det å forstå
- Å utvikle bevissthet om forholdet mellom det å kunne og det å forklare

Følelsesmessige mål:

- Å skape tillit til at en selv kan få til noe
- Å skape glede over det å gjøre, det å observere og det å oppdage

Metodisk grunnlag

Euklidisk geometri spiller en viktig rolle i utviklingen av vitenskapelig tenkning og er derfor sentral i vitenskapelig undervisningen av to grunner:

- Det er et teoretisk system som representerer reelle situasjoner som mennesker kan oppfatte spontant gjennom sine sanser.
- Det er en naturlig øvelse i eksperimentering og undersøkelse.

Undervisning i geometri, spesielt på barne- og mellomtrinnet, må vise til og understreke forholdet mellom emnet og virkeligheten (det tredimensjonale rom), og mellom emnet og konkrete mål. For å understreke dette kan vi henvise til Freudenthals utsagn: 'Geometry is grasping space' eller til Poincaré's tanke om at “*un être immobile n'aurait jamais pu acquérir la notion d'espace*”¹, eller til andre vitenskapsfolk og forskere slike som Enriques, Weyl og Piaget. Punkter, linjestykker, trekanter og andre enheter som er inkludert i geometrien, er ikke konkrete objekter. De er matematiske objekter som kan bli konkret representert, eller de er konstruerbare ved tegning eller ved hjelp av logisk strukturert materiell. Et metodisk perspektiv basert på interaksjon med konkrete gir et effektivt grunnlag for den intuitive fasen av kognitive prosesser og teoretiske applikasjoner. Elevene blir da

¹ H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Paris: Flammarion, 1902, p. 78

ledet inn i to baner. Den ene går nedenfra og opp, fra virkeligheten til en abstrakt modell av virkeligheten, hvor objekter kan bli behandlet rigorøst. Den andre går ovenfra og ned hvor konkrete objekter kan opptre som hjelpemidler i tolkninger og beskrivelser. Denne skiftende dynamikken er viktig for å unngå misforståelser, men man må være forsiktig med å blande de to tilnærmingene. Fra 1960-årene var dette hovedtrenden i geometrisk undervisning i de engelsk-språklige landene. Dette var til forskjell fra Frankrike hvor Bourbaki gruppa hadde stor innflytelse, spesielt på videregående nivå. I Italia fortsatte den klassiske utdannelsen i geometri; gjennom årene blandet med eksperimentelle/heuristiske tilnærminger ofte uten noe klart skille mellom de to tilnærmingene.

Fremdeles er det vanlig å finne spor i lærebøker av en læring der det blir referert til statiske figurer, og hvor forstørrelser blir presentert som rene formler. Et eksempel på denne veldefinerte undervisningsmetoden er gitt i E. Castelnuovo's innovative arbeid som først ble kjent i boka "Geometria intuitiva" (1948), som på en måte samler og viderefører Montessori's arv.

I den senere tid har nytt fra nevro-vitenskapen og kognitive studier gitt muligheter for å tolke menneskelig 'geometrisk intelligens' som et kodenettverk og som analogiske representasjoner som er tilegnet gjennom aktive handlinger i den reelle verden. Dette gir vitenskapelig verdi til utsagn som før bare var intuisjoner, selv om de var eksperimentelt bevist.

Enaktivismen, en generell teori om kunnskap knyttet til biologi og til erfarings-filosofier, påvirker undervisning og utdanning. Denne teorien forbinder den 'enaktede' modellen med begreper fra andre konsoliderte metodologier/teorier som for eksempel *manipulative use* (bruk av konkreter som kan endres), *embodied cognition* (kroppsbasert tenkning og læring), *cooperative learning* (læring i samarbeid). Enaktivismens teoretiske prinsipper kan oppsummeres som følger:

Subjektet er et levende vesen som er i stand til selv å sette i gang prosesser, nedfelt i levende vesener, som er bestemt ut fra forholdet mellom det ytre miljøet og interne individuelle strukturer.

Enaktivismen fokuserer på '*sense-making as a situated, embodied activity*' (meningsforståelse som en situasjonbetinget aktivitet basert på handlinger). Castelnuovo's aktive læringsmetode er konsistent med dette rammeverket og er tatt i bruk i dette undervisningsopplegget som omfatter konkreter og måter å bruke dette på.

Selve undervisningsopplegget

Undervisningen er konsentrert rundt bruken av dynamiske modeller (en geometrisk Meccano), laget av enkle elementer. Elementene er stenger i ulike lengder og farger (laget av plast, tre eller metall) med hull i endene og hull jevnt fordelt på stengene. I tillegg kommer kroker og strenger (figur 1).



Figur 1. The material for the activity

Det ville ha vært enda bedre å la elevene lage stengene selv, ved å følge gitte instruksjoner med oppgitte mål og antall, og så la dem tegne dem på plastark (eller papp), klippe dem ut og så lage hull.

Arbeidet er ment å gi sensomotoriske erfaringer av det matematiske objektet trekant, i tillegg til øvelse i å bruke matematisk språk både muntlig og skriftlig i beskrivelsen av hva som er gjort og observert gjennom aktiviteten. Emnet legger også et grunnlag for et flerkulturelt syn på menneskelig kunnskap og teknologi.

Hva skal gjøres:

- Par eller smågrupper bygger flate dynamiske figurer. De analyserer resultatene de får, tegner, skriver kommentarer og beskriver hva de har observert.
- De sammenligner figurene de har laget og diskuterer i klassen.

Opplegget er delt opp i tre undervisningsøkter. Økt 1 er en introduksjon, mens øktene 2 og 3 er ment å gi grunnlag for at elevene skal kunne bli kjent med det matematiske begrepet trekant, inkludert kriteriene for kongruens. Øktene er strukturert som følger:

En forhåndsanalyse

Forslaget er laget for å møte aktuelle problem i et multikulturelt klasserom spesielt når det gjelder:

- økte individuelle forskjeller (avhengig av kulturbakgrunn, tidligere skolesystem og erfaringer fra tidligere skoler, språknivå og relasjonelt og kognitivt utviklingsnivå)
- ulike former for uro eller ubehag (vist gjennom isolering, mistillit eller likegyldighet til skolens aktiviteter eller manglende konsentrasjon/deltakelse)

Grunnleggende ide i opplegget er:

- å legge til rette for et miljø der handling og individuelle erfaringer i en sosial kontekst blir verdsatt, og der det fins redskaper som reduserer behovet for muntlige instruksjoner.

Det pedagogiske målet består i:

- å la alle gjennomgå kognitive prosesser til tross for språkproblemer.
- å utvikle språket gjennom erfaringer og samarbeid med klassekamerater

Målet med materialet og bruken av det, er valgt for å støtte elevene i å skape mentale bilder. Denne prosessen er nødvendig for å utvikle representasjoner av begrepene i samsvar med de ulike fasene: sensomotorisk erfaring – mentale bilder – begreper.

Utprøving av opplegget

Opplegget er prøvd ut i to 6. klasser (tilsvarende norsk system) ved “Gandhi” skolen i Firenze. De to klassene hadde henholdsvis 22 elever (6 innvandrerelver og 5 med lærevansker) og 21 elever (7 innvandrerelver og 5 med lærevansker) i tillegg til to lærere (G. Sallustio og A. Scialpi) som samarbeidet med instruktøren.

Opplegget ble først beskrevet av instruktøren og så diskutert med de to klasselærerne.

Opplegget ble delt i 3 økter:

Økt 1: Å bli kjent med materialet (Varighet: 1,5 time)

Presentasjon av den “geometriske meccanoen”

Elevene i de to klassene ble samlet i ett stort rom. Siden aktiviteten skulle utføres med nytt materiell, bestod første trinn i å presentere og demonstrere materialet. Lærerne viste materialet, hvordan stengene kunne kobles sammen i endene ved hjelp av kroker, hvilke deler som kunne settes sammen og hvilke figurer som kunne lages.

Første frie sammenstilling

Aktiviteten ble utført i små grupper av elever (3-4), som satt rundt pulter som var plassert i passende avstand i rommet.

Hver elevgruppe fikk ett sett med stenger (15-20) og kroker. De valgte stenger fritt og satte dem sammen på mange måter ved å feste endene sammen (figurene 1.2 og 1.3). Så ble de bedt om å tegne de fineste på papirark. Disse tegningene ble samlet inn av lærer i slutten av arbeidsøkten. (De skulle brukes i en utstilling som skulle beskrive hele aktiviteten) (se foto). Før de satte i gang, fortalte lærer at figurer med tre sider ville bli fokus i de neste leksjonene.

Økt 2: Å legge til rette for en motiverende kontekst (Varighet: 4 timer)

Vurderings og revurderingsarbeid (30 minutter)

Dette arbeidet ble utført i teatersalen som var utstyrt med en projektor og en skjerm. Begge klassene var til stede.

Først fikk hver elev utdelt tre stenger og kroker som skulle kombineres, og de ble bedt om å:

- observere figuren som var laget;
- lukke øynene og se for seg trekantobjekter som finnes i den virkelige verden;
- skrive ned navnet på et tenkt objekt og så tegne det på papir;

Lærer viste ulike eksempler på figurer, både de elevene hadde laget selv, og de som de mentalt hadde sett for seg. Tegnearkene ble samlet inn. (Figur 2).

Kommentarer av bilder (30 minutter)

En omfattende samling av foto ble vist på skjermen, slik at alle skulle bli oppmerksomme på den store mengden av trekantar som omgir oss (Figur 3).

Etterpå ble aktivitetene gjennomført parallelt i de to klassene.



Figur 2



Figur 3

Surfing på internett (1 time)

I datalaben ble elevene delt inn i små grupper; delvis ledet av instruktøren: De ble bedt om å søke websider som hadde å gjøre med trekantar. Resultater fra elevenes søk ble så samlet.

Et flerkulturelt overblikk (1 time)

Den omfattende bruken av trekantformer i alle kulturer i menneskets historie fra de tidligste tider og fram til i dag, ble påpekt av lærer ved å fokusere på og diskutere noen karakteristiske eksempler:

- bruk i dagliglivet og i applikasjoner (pilespisser, verktøy ...)
- de første bygninger (telt og små hus)
- arkitektoniske strukturer (taktekingsteknologi, bygging av espalier, nettverk av bjelker ...)
- målinger
- kartlegging (bygninger, leiligheter, byer, land ...)
- Progressive og avanserte arbeider i kunst og arkitektur

Noen grunner til at trekantformen dukket opp naturlig og ble så suksessfull, ble gitt som følger:

- stivheten i trekantstrukturen
- mulighet til å synliggjøre og fastsette ethvert punkt i kartleggingsprosesser
- estetisk verdi

To eksperimenter (1 time)

To eksperimenter ble gjennomført i samarbeid med lærer for teknisk utdanning:

- Et gikk ut på å sjekke stivheten til trekantstrukturen ved å presse modeller laget ved hjelp av foldet papir;
- Det andre gikk ut på å kartlegge klasserommet ved hjelp av en avstandsmåler. Rommet hadde omtrent rektangulær form, og elevene forstod nødvendigheten av å dra en diagonal linje for å få til avbildningen. En vurdering av de fire sammensatte stengene klargjorde situasjonen og fremhevet at den eneste oppnåelig løsningen var å feste en stang i to motsatte hjørner.

Økt 3. Begrepskonstruksjon og språkutvikling (varighet: 3 timer)

Aktiviteten var organisert i små elevgrupper (3-4), og utviklet seg gjennom ulike trinn av økt vanskegrad.

Eksistensbetingelser for trekanter (1 time)

Aktiviteten fortsatte med konstruksjon av trekanter ved kobling av tre stenger. Hver gruppe av elever fikk utlevert to ulike sett med tre stenger i hvert, ett sett om gangen. Oppgaven gikk ut på å kombinere delene slik at de utgjorde figurer. Hensikten var å oppdage at:

1. Det første trippelsettet førte til en og bare en 'lukket' figur (en trekant!)
2. Det andre trippelsettet førte til en mengde 'åpne' figurer ... (Figur 4)

Grafiske representasjoner av de oppnådde figurene i hvert sett, ble rapportert av en elev i hver gruppe, og dette viste seg å være nyttig i registreringen av resultatene.

I hver gruppe observerte lærer verbal kommunikasjon og bruk av terminologi under aktiviteten (eksempler er: stang, side, åpen, lukket, rom, forhold, sum, lengde...). Etter hvert ble elevene i hver gruppe bedt om å skrive ned en kommentar på ark i forhold til hva de så. Oppgaven var bare "Jeg ser at ...". Læreren samlet så inn hva elevene hadde svart for å analysere resultatene.

Etterpå rettet lærer oppmerksomheten mot betingelsene for å lage en trekant og til antall mulige løsninger ved å gi følgende oppgave: (hentet fra "Sticks and Triangles", 21° RMT):

"Ibrahim legger fem stenger av ulik lengde på pulten sin. Lengdene var: 4 enheter; 5 enheter; 6 enheter; 9 enheter; 11 enheter. Hvor mange ulike trekanter kunne han lage? Forklar alle mulighetene."

Trekantkonstruksjon med ett gitt element (side eller vinkel) (1 time)

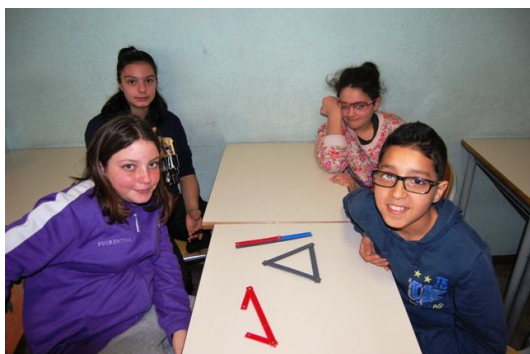
Etter å ha foreslått for elevene at de skulle bruke stenger og hyssing eller elastisk strikk for å lage trekanter, gav læreren dem tid til å arbeide. Etterpå fikk han i gang en diskusjon ved å stille følgende spørsmål:

Hva slags elementer ser du som kan komme til å bli forandret ved bevegelse?

Han oppfordret til kommentarer fra elevene i sammenslått klasse.

Trekantkonstruksjon med to gitte elementer (side & vinkel / side & side / vinkel & vinkel) (1 time)

I denne økten ba lærer elevene om å ha en fast vinkel og en fast side, og så bruke elastiske bånd for å forlenge en side og til å 'lukke' trekanten. De skulle lage, observere og produsere grafiske representasjoner av de ulike trekantene de laget (figur 5).



Figur 4



Figur 5

Følgende spørsmål ble så stilt:

- *Gitt en annen vinkel, blir noe forandret?*
- *Gitt en annen side, vil noe bli forandret?*

Som nevnt tidligere ble kommentarene samlet og ordnet.

Definisjoner

Etter denne aktiviteten, ble elevene engasjert i strengt verbale beskrivelser av spesielle trekanter. De måtte bruke geometrisk terminologi som likebeint, rettvinklet, likesidet og ulikesidet trekant. Elevene ble så bedt om se for seg trekanter tilhørende de nevnte typer trekanter og så beskrive hva som kunne være mulige forskjeller innen hver klasse.

Problemløsning

Problemløsningsfasen ble gjennomført for at elevene skulle vise om de kunne identifisere trekanter (se vedlegg for oppgavene).

Ved en tradisjonell tilstelning ved skoleårets slutt der de beste verkene gjennom året ble stilt ut, ble materiellet og de mest interessante produktene presentert av noen elever som var involvert i prosjektet (se bildet).

En etterfølgende analyse

Flere resultater kan bli avledet fra aktiviteten. Vi vil fokusere på de mest relevante, som viser om man med opplegget nådde de mål som var satt.

- Bevis på potensialet i “ den geometriske Meccanoen” gjennom matematiserings-prosessen.

Opplegget viste at det å bruke materiellet i en felles kontekst førte til en individuell rekonstruksjon av de eksterne operasjonene. Vi vil her bare diskutere hva slags rolle materiellet spilte i forbindelse med ’trekantulikheten’. Stengene viste seg å være en artefakt som utviklet seg til begrepet ’linjestykke’, uttrykt ved det lingvistiske tegnet ’side’. Vi observerte under aktiviteten at de tre stengene ikke spilte samme rolle. Elevene fokuserte først på stanga med gitt lengde, som de kalte ’utgangspunktet’, før de tok hensyn til de andre to stengene som fortsatt i noen grad kunne endres. Denne måten å jobbe på førte til en naturlig klassifisering av trekantsidene i to typer. Den første gjelder de faste elementene, mens den andre typen ble kalt “resten”. “Restenes” rolle viste seg å være avgjørende fordi de førte til at elevene oppdaget at et visst forhold mellom sidene må være oppfylt, for at de skal kunne danne en trekant. Bevis på dette ble blant annet funnet i analysen av elevenes svar på oppgaven: ”Jeg ser at ... Vi kunne observere at erkjennelsen av et forhold, førte til spontane kognitive prosesser som kunne spores gjennom ordene elevene brukte, slike som: “*kort/medium/lang*”, “*proporsjonal/ikke-proporsjonal*”, “*forskjellig/lik*”, og som en konsekvens av dette, uttrykk basert på tolkninger av beregninger. De viktige skrittene i denne prosessen viste seg å bygge på to spesialtilfeller; den likesidete trekanten og degenererte trekanten (bare et linjestykke). Det første tilfellet er karakterisert ved setninger som: “den lukker seg siden sidene er like”. Det andre tilfellet, det uventede, viste seg å ha en sterk innflytelse fordi dette tilfellet ledet elevene til å matematisere betingelsen for lukkethet i form av “lengder” og “sum av lengder”. I dette tilfellet er summen av to lengder faktisk lik den tredje lengden - to stenger er lik den tredje. Dette ble uttrykt i setninger som: “de to gjenværende kantene utfyller den tredje”, eller “*to kanter gir lengden av den lengste kanten*”. Neste skritt bestod så i å uttrykke ’trekantulikheten’: “*Figuren lukker seg når to sider er lengre enn den tredje*”.

- Instrumenter til å identifisere logiske/geometriske kompetanser.

For eksempel:

1. Manglende evne til å skille de to foregående spesialtilfellene ved hjelp av ord som uttrykker lengdemål: hvis figuren kan lukkes, så er alle sider kortere enn summen av de to andre. Hvis figuren ikke kan lukkes, så eksisterer det akkurat en side lenger enn summen av de to andre.
2. Manglende evne til å utlede tilsvarende kongruenskriterier ut fra muligheten til å lage en av de spesielle trekantene.

Problemene bunner i mangel på visualisering og godt språk (1), og på vansker med å håndtere den sammenlignende egenskapen til likheter (2).

- Instrumenter for å vurdere kognitive forskjeller mellom elever i klassen.

Arbeidet viste seg å være nyttig for sjekking av kompetansenivåene til elevene som deltok i prosjektet, og for å planlegge passende framtidig undervisningsopplegg. Eksempler på to grensetilfeller er:

1. manglende evne til å representere grafisk en viss figur komponert av stengene (eleven klarte bare å gjøre det ved å gjengi bevegelsen med pekefingeren (ordnet på stengene) (bilde).
 2. evnen til å produsere en perfekt beskrivelse av en fremgangsmåte for å beregne antallet av alle mulige trekkanter i oppgaven ”Stenger og trekkanter” (de det gjaldt observerte også at den samme figuren gikk igjen tre ganger).
- Muligheter opplegget gir for å møte typiske problemer i multikulturelle klasserom.

Aktivitetene syntes å passe på grunn av det var fleksibelt og kunne tilpasses hver enkelt elev. Opplegget viste seg å fungere også når klassen var ikke-homogen både kognitivt, sosialt og språklig. Alle elevene deltok i det minste ved å se på og berøre de konkrete objektene.

- Språkutvikling

Arbeidet bekrefter at utviklingen av språket blir støttet når elevene får arbeide med konkrete på en direkte måte og samhandle og dele ideer med klassekamerater. Dette står i kontrast til hvordan det er når elevene bare lytter til lærer, og det blir referert til statiske figurer. I tillegg er det nødvendig å merke seg at strukturering av tanken og det å gi verbale forklaringer, viste seg å være hovedproblemene for elevene i utprøvingen av opplegget. Disse problemene var ikke begrenset til de fremmedspråklige elevene. Forandringene som ble gjort på de konkrete figurene drev elevene til å si, eller forsøke å si hva som ble gjort. På den måten ble språklæringen stimulert og kunne hjelpe elevene å komme fra: det å mangle ord, til å ha ord; fra å ikke vite hvordan ting blir uttrykt til å få passende ordbruk; fra å være vag til å bli presis osv.

- Følelsesmessig innflytelse

Elevene var fascinert av aktivitetene, og de følte og viste:

- nysgjerrighet og glede ved å konstruere figurer ved hjelp av stenger
- tilfredshet ved å arbeide i små grupper
- interesse for hva de konkret kunne se og oppdage
- interesse for å oppdage forhold både i virkeligheten og i den geometriske verden

Alle likte arbeidet, og de hadde ikke problemer med å være oppmerksomme i lange perioder. Det beste eksemplet på dette var en kinesisk jente som tidligere hadde nektet å delta i noen aktivitet på skolen, men som nå deltok.

- Konsekvenser for læreres videreutvikling

Implementeringen av opplegget har hatt en god innflytelse når det gjelder lærere på skolen. For øyeblikket er det fire lærere ved skolen som er villige til å gå gjennom og revidere det matematiske innholdet og fornye undervisningen. Et klasserom, tilpasset gruppearbeid med verktøy og konkrete, ble tildelt matematikkseksjonen, noe som oppmuntrer til aktiv læring også framover.

Referanser

- Bartolini Bussi, M. G., Mariotti M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective, in English L. D. (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (second edition) (746-783). Routledge.
- Castelnuovo, E. (2008). *L'officina matematica: ragionare con i materiali*. Lorenzoni F. (ed.). Molfetta: La Meridiana.
- Furinghetti, F., Menghini, M. (2014). The role of concrete materials in Emma Castelnuovo's view of mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics* **87** (1-6). Dordrecht: Springer.
- Núñez, R. E., Edwards, L. D., Matos, J. F. (1999). Embodied Cognition as Grounding for Situatedness and Context in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics* **39**: (45-65). Dordrecht: Springer.
- Rossi, P. G. (2011), *Didattica enattiva. Complessità, teorie dell'azione, professionalità docente*. Milano: Franco Angeli
- <http://www.di.ens.fr/~longo/geocogni.html>

Andre utprøvning

ved Hana Moraova^{**}

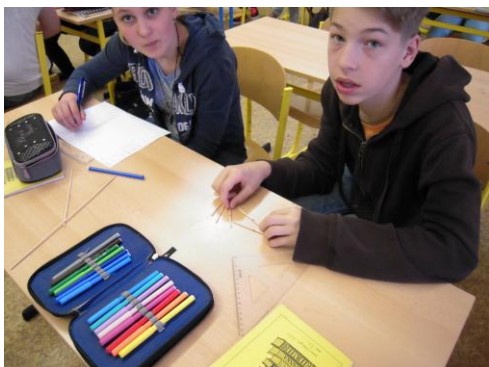
Utprøvning – Trekanter

Praha, 27. mai 2014, 4 etterfølgende undervisningstimer, 7. klasse.

1. Aktivitet 1 (Vi hadde ikke materiell for konstruksjoner), elevene fikk grillspyd av tre, og ble bedt om å lage pinner med lengder: 4, 5, 6, 9 og 11 cm. Etterpå ble de bedt om å lage så mange trekanter som mulig – oppdagelse/repetering av 'trekantulikheten'.
2. Ark 1 – se vedlegg, individuelt arbeid
3. Formulering av trekantulikheten på engelsk

^{**} Charles University i Praha, Tsjekkia

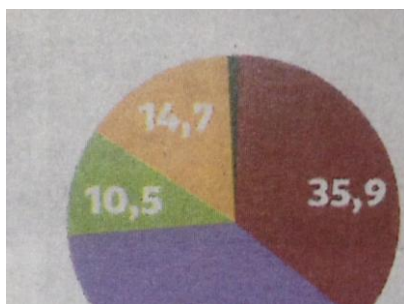
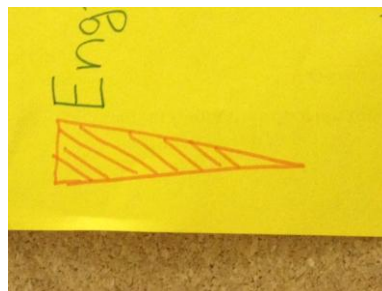
4. Vinkler i en trekant / vinkelsummen i trekanter, vinkler og lengde på sider og (ark 1 nederst)



5. Terminologi – likesidet, likebeinet; stump, spiss, og rett vinkel

a. Klassifisere trekanter på bilder

b. Klippe ut ulike trekanter fra et fra papirark og så sette navn på dem.



6. Trekanter i arkitekturen
7. Trekanter rundt oss, bruk av mobiltelefoner for å ta bilder av trekantobjekter som finnes i skolebygningen (eksempler i vedlegg)
8. Å lage et golv med trekantfliser (eksempler i vedlegg)
9. Stjerner med fem og seks punkter, heksagram, Davidsstjerne, hva de betyr i ulike kulturer, hvordan de kan lages, konstrueres, foldes.

Tredje utprøving

ved Marie-Hélène Le Yaouanq^{***} og Brigitte Marin^{***}

INTRODUKSJON

Tredje utprøving ble foretatt av Paulou, lærer for en 7. klasse i Roger Martin du Gard, en skole lokalisert i et pedagogisk satsingsområde i Frankrike. Læreplanen for 7. klasse inneholder trekanter, og inkluderer begrepene 'trekantulikhhet' og areal av trekanter. Tilfeller med like trekanter er ikke med i læreplanen. Vi oppmuntrer likevel elevene til å observere at når en side er bestemt og tegnet, kan man konstruere flere trekanter: symmetriske to og to i forhold til denne siden, i forhold til halveringslinja og i forhold til midtpunktet på denne sida.

Denne delen av kurset består av to faser.

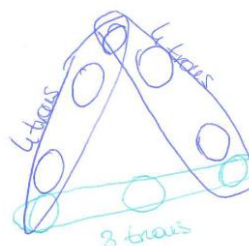
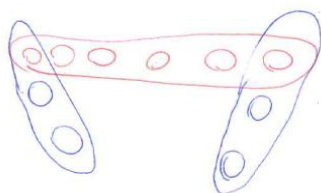
FASE 1: TREKANTULIKHETEN

Tre trinn utgjør utforskningsøkten.

En aktivitetsfase er basert på et "Meccanosett", hvor plastikkstenger i ulike lengder kan bli satt sammen med skruer. Elevene arbeider i grupper. De får utdelt stenger og skal lage så mange ulike trekanter som mulig.



For å få en oversikt over forsøkene, må de tegne de ulike resultatene på et papirark.



Så kom en kollektiv fase hvor elevene gjorde en opptelling av antall trekanter som er mulige å lage, og hva som ikke går. Lærer gav så elevene en lek der de skulle gjette om det gikk an å lage trekanter ut fra sider med gitte lengder. Elevene måtte diskutere

^{***} UPEC University, ESPE, Créteil (France).

muntlig, og lærer grep bare inn for å regulere diskusjonen. Denne fasen viste hvor vanskelig det er for elevene å finne en presis formulering i stedet for å si ”ikke lag for stor åpning”, ”lukk lengdene” og lignende (Margolinas, 2010). Likevel kunne en i slutten av økten legge merke til at aktiviteten satte alle elevene i stand til å utvikle en metode som gjorde dem i stand til å avgjøre om en trekant med gitte lengder kunne bli laget eller ikke.

De neste øktene ble satt av til å formulere egenskaper til trekanter. Disse formuleringene skulle så brukes til å vise eksistensen av egenskapene og til å vise hvilke trekanter det er mulig å lage basert på konstruksjonsarbeidet som var utført med Meccano-settet.

Vi så at elevene ofte hadde problemer når de skulle konstruere trekanter ved hjelp av linjal og passer. De hadde ikke samme problemer når de brukte Meccano settet, heller ikke når lengdene var 4, 5 og 9. Da ledet materialet dem direkte til løsningen.

FASE 2:

Elevene fikk i oppdrag å undersøke flagg fra ulike land, med trekanter i mønsteret. De måtte så velge ett, og så beskrive det geometrisk, representere det og undersøke det med utgangspunkt i hvilken mening de ulike elementene i flagget representerer i forhold til landet det tilhører (former og farger).

Dette arbeidet skulle gjøres parvis utenfor skolen og var et skriftlig arbeide. Elevene skulle så presentere det i klassen. Elevene deltok med entusiasme og leverte gode bidrag. Arbeidet ble avsluttet med arealberegninger av trekanter, og beregninger av prosentandeler av trekantareal; andeler uttrykt i prosent. Denne fasen gav åpning for flere mulige løsninger som konstruksjoner og tverrfaglig arbeid.

Referanser

Margolinas, 2010, Un point de vue didactique sur la place du langage dans les pratiques d'enseignement des mathématiques

<https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-00470238/document> (retrieved on 01/05/2015)

Konklusjon etter tre piloteringer

ved Maria Piccione

Hele eksperimentet kombinerer to komponenter om *hva* og *hvordan* et spesielt emne kan bli gjennomført i et flerkulturelt klasserom: en undervisningsmodell på den ene siden og et sett av praktiske forslag på den andre. Resultatene fra utprøvingene gir oppmuntring til å fortsette arbeidet.

Enkelte valg gjort underveis og noen elevers atferd bør framheves på grunn av verdien for faget og fordi tilbakemeldingen er så positiv.

I den andre utprøvningsen var materiellet enkle grillspyd av tre. Disse gav elevene en sensomotorisk erfaring av trekantformer, som så ble grunnlaget for den neste fasen som var aktiviteter i forhold til 'trekantulikheten'. I tillegg ble den eksperimentelle treningen understøttet av aktiviteter som klipping og folding av papir, og elevene ble til og med gitt komplekse figurer med trekanter og oppgaver om golv med trekantfliser. Arbeidet viser hvordan det er mulig å nå høyere nivåer når det gjelder anvendelse av begrepene lineær lengde og vinkelstørrelse. Veien gjennom opplegget kan bli fulgt gjennom spørsmålene som blir stilt i oppgavearkene. Disse krever at det blir utført sammenligninger, og at forhold mellom lineær lengde og vinkelstørrelse blir tatt i betraktning i tillegg til variasjonsområdet for verdien av lengdene.

I den tredje utprøvningsen, ble den originale Meccanoen brukt. Dette tilfellet viser igjen hvor effektive de fysiske handlingene er når det gjelder å oppfatte de konstituerende elementene i modellen og de mulige endringene og plasseringene av elementene. I samsvar med resultater fra andre studier, gir materiellet brukt her, bedre muligheter enn bare kompass og linjal til å skape forståelse for geometriske egenskaper slik som 'trekantulikheten'. Dette kan forklares ved berøring og visuelle sansninger i et 3dimensjonalt miljø, noe som er fullstendig fraværende i en kontekst der figurene allerede er tegnet; noe som er vanlig i tradisjonell undervisning.

Nyttige og kontekstuelle forslag dukket også opp under denne utprøvningsen. Det viste seg hullene som var jevnt fordelt over stengene i Meccano-settet, fikk elevene til å uttrykke lengder som antall hull (som et slags mål) (se figur 3?). I tillegg kan oppdagelsen av symmetriske trekanter når en side var fast, nevnes som et eksempel på visualisering. Det ble også tatt noen skritt i retning av målinger ved å regne ut areal og deler av areal.

I hver utprøvningsen gav utforskning av trekanter i nærmiljøet, naturlige så vel som kulturelle, opphav til flerkulturelle diskusjoner. Spesielt bør oppgaven om ulike lands flagg framheves, hvor elevene ble bedt om å forklare trekantens betydning i ulike kulturer.

Som konklusjon kan det sies at det å utforske det 'vide og dype havet av trekanter' viste seg å føre til deltakelse, grundig arbeid, og vi kan si at både interessen og til og med entusiasmen var stor.

Videreutvikling av undervisningsopplegget

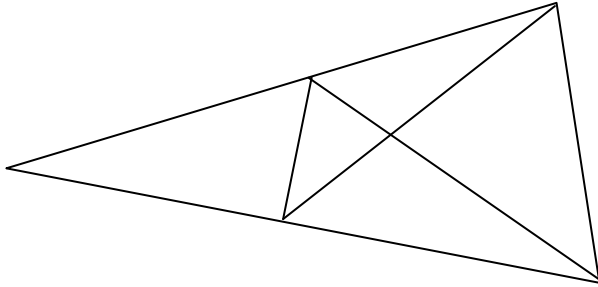
Vi kan gi noen eksempler på en naturlig videreutvikling av opplegget:

- Å introdusere kriterier for likeforma trekanter og nærme seg det geometriske formbegrepet ved å skille mellom det som går på lik form og det som går på lik type
- Å utvide utforskningen til å gjelde firkanter og andre polygonklasser
- Å ta inn spørsmål om beregninger (perimeter/areal)
- Å lage opplegget på ny der program som GeoGebra, blir tatt i bruk, der stenger blir linjestykker i et todimensjonalt rom.

VEDLEGG

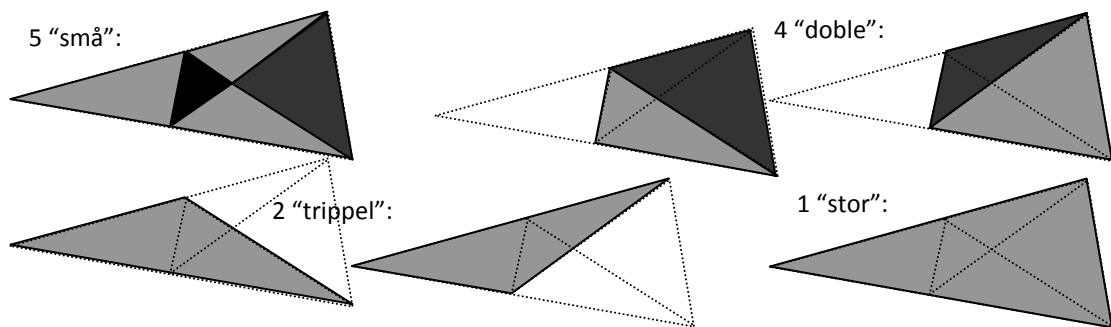
Problemer

- **“Godt gjemt”** (Spørsmål i 21° RMT)
Hvor mange ulike trekanter ser du i denne figuren?



Involverte prosesser: visualisering, gjenkjennelse og telling

Løsning

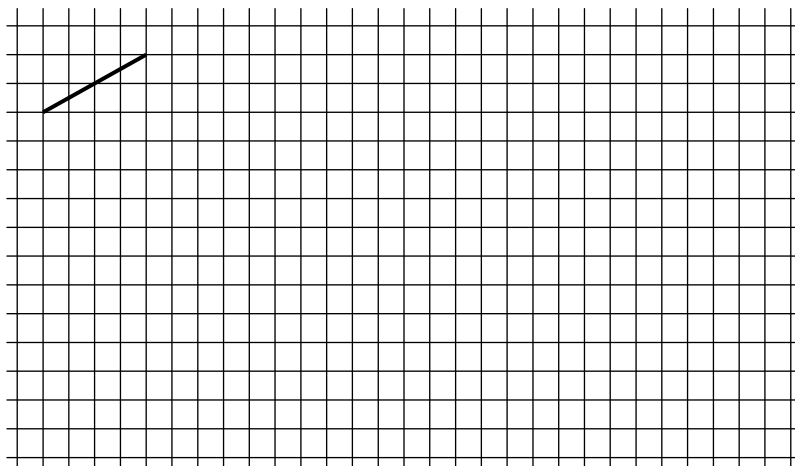


- “Trekantklipping” (Oppgave i 19° RMT)

Finn ulike trekanter (dvs. ingen overlapping, på rutearket). Ved å følge disse to instruksene:

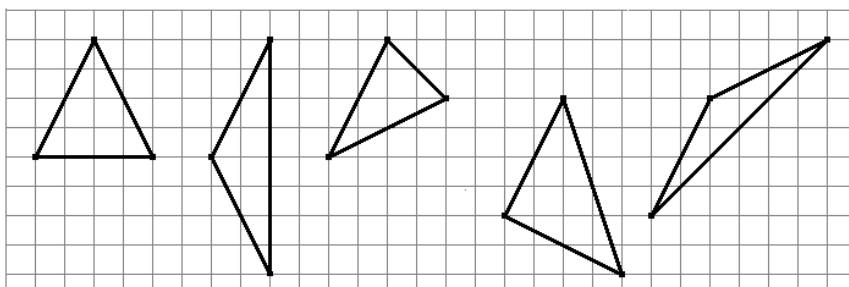
- De må ha to sider med samme lengde som linjestykket som er tegnet inn på arket under.
- Hjørnene må være i skjæringspunktene på rutearket.

Hvor mange trekanter finner du? Tegn dem og klipp dem ut. .



Involverte prosesser: identifikasjon av form og mål, deduksjon

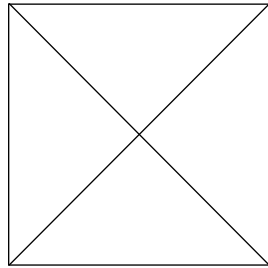
Løsning



- **“Sammensatt figur”**

En figur er tegnet inn på dette arket. Hvor mange ulike trekanter med ulik form kan du se i figuren? Kan du beskrive formene du finner?

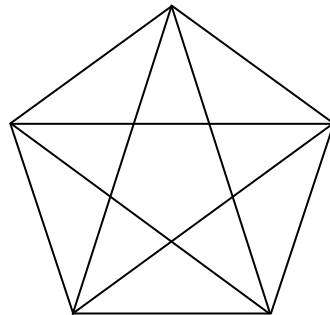
(a)



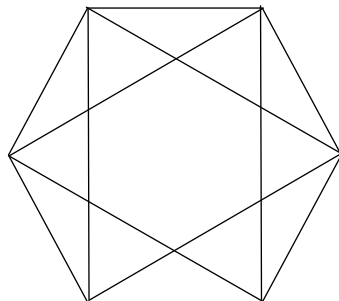
Involverte prosesser: Analyse og klassifisering av former

To vanskeligere versjoner av problemet

(b)



(c)



- **“Et golv laget av trekanter”**

Følg dine egne ideer og lag et golv med trekantfliser.

Involverte prosesser: Analyse av form og kombinasjoner