Multiculturalism, Migration, Mathematics Education and Language
Project Number: 526333-LLP-1-2012-1-IT-COMENIUS-CMP

FINGERMULTIPLIKATION

von Barbro Grevholm*

EINLEITUNG

Die folgende Einheit ist ein Teil des vielseitigen Projektes M³EaL: Multiculturalism, Migration, Mathematics Education and Language (Multikulturalismus, Migration, Mathematik-Unterricht und Sprache) (526333-LLP-1-2012-1-IT-COMENIUS-CMP). Das Gebiet dieser Studie befasst sich mit verschiedenen Herangehensweisen (Geschichte, Kultur, Tradition, Gebrauch von Hilfsmitteln und Büchern) an die Multiplikation, die Verwendung von konkreten Hilfsmitteln bei Berechnungen, die Verwendung von früher Algebra und Formulierung von Regeln für die Multiplikation und mathematische Beweise, verschiedene mathematische Beweiswege und mathematische Argumentation.

Ausführung mit Lehrer Innen

Das Projekt wurde zuerst in zwei norwegischen Schulen mit zwei verschiedenen MathematiklehrerInnen ausgeführt. Die zweite Ausführung fand in Österreich, und die dritte in der Tschechischen Republik statt. Voraussichtliche mathematische Themen für die Entwicklung sind Arithmetik der Multiplikation, Operationen und Regeln, Faktoren, Produkte und Faktorisierung, Beweis und beweisen, Geschichte der Mathematik, metakognitive Reflexion des Lernens von Mathematik und Mathematik in Relation zu verbalem Lernen verstehen.

Ziele der Einheit

Das Ziel dieser Einheit ist es, die SchülerInnen zum Reflektieren über den Prozess der Multiplikation zu bringen, die Eigenschaften der Multiplikation zu erkennen und Verbindungen zwischen der Multiplikation und anderen Bereichen der Mathematik zu sehen. SchülerInnen sollten auch darüber reflektieren, was sie in der Mathematik immer wissen müssen, und was mit Hilfe von Werkzeugen oder Hilfsmitteln

*Fakultät für Maschinenbau und Wissenschaft, Fachbereich Mathematische Wissenschaft, Univerität Agder, Norwegen.

reproduziert werden kann. Die SchülerInnen sollten auch erkennen, dass die Mathematik konstruiert ist und von gewöhnlichen Leuten, in vielen Teilen der Welt, verwendet wird. Durch das Interviewen der eigenen Familienmitglieder, können sie lernen, wie die Multiplikation in ihrem eigenen Land gehandhabt wird.

Hauptausführung

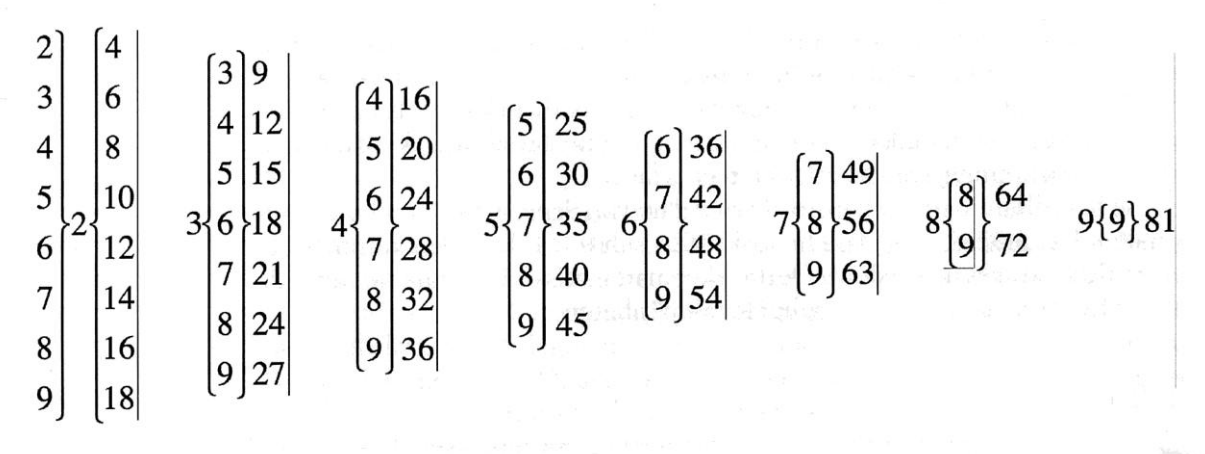
von Barbro Grevholm

Der Plan: *Originaltext der Unterrichtseinheit Fingermultiplikation*

Start der Einheit:

Stunde 1

Den SchülerInnenwird ein Bild einer Gruppe von Zahlen in dreieckiger Form und ein handgeschriebenes Buch von 1601 (13 Jahre vor dem Druck des ersten mathematischen Buches in Schweden) gegeben. Siehe Bild unten. Die Geschichte des Buches kann erzählt werden. Siehe Anhang 2. Eine Gruppendiskussion über das Bild wird von der Lehrperson mit den folgenden Fragen (nachdem die SchülerInnen Zeit zum Studieren der Zahlensequenzen hatten) eingeleitet:



1 Was kannst du in der Anordnung der Zahlen erkennen? Hast du etwas ähnliches bereits vorher gesehen?

2 Was könnte der Grund dafür sein, die Zahlen so zu arrangieren? Wie ist dir so eine Anordnung in deinem mathematischen Lernen begegnet?

3 Welche Eigenschaften der Zahlen, macht die Tabelle im alten Buch möglich? Was könnte der Grund dafür sein, dass solche kurzen Arrangements heute nicht verwendet werden?

Kommentare für die LehrerInnen: Wir können von den SchülerInnen erwarten, dass sie die Reihen der Ergebnisse im 2er-Verzeichnis und im 3er-Verzeichnis erkennen. Vielleicht haben sie eine Verbindung zur normalen Multiplikationstabelle? Hier ist es für die Lehrperson möglich die SchülerInnen aufzufordern, die Multiplikationstabelle für 10 Mal 10 Einheiten aufzuschreiben und in dieser Tabelle die Produkte, die im dreieckigen Muster angeführt sind einzufärben. Nach weiterer Nachforschung und Diskussion, könnte die Klasse herausfinden, dass die fehlenden Produkte im dreieckigen Muster schon in vorhergegangenen Verzeichnissen aufgeführt sind. Es sind alle gleichen Berechnungen aus dem dreieckigen Muster entfernt.

Nun kann der/die LehrerIn den SchülerInnen erklären, dass diese Tabellen auf zwei Arten verwendet werden können: um das Produkt zweier ganzer Zahlen zu berechnen, oder um von einer Zahl als Produkt gesehen die Faktoren der Zahl abzulesen. So z.B. kann man 3·4 berechnen, oder danach fragen, welche Faktoren eine gegebene Zahl wie 12 besitzt. Hier könnte die Lehrperson die Bedeutung der Begriffe Faktor und Produkt, die bei der Multiplikation verwendet werden wiederholen und die SchülerInnen auf den Unterschied zur Addition hinweisen, wo man von Termen und Summen spricht.

Übungen:

1 Verwende eine der Tabellen um folgendes zu berechnen: a) 2·9 und 9·2 b) 8·7 und 7·8 c) 5·8 und 8·5. Was fällt dir auf? Welchen Namen hat die Regel der Multiplikation, der diese Zahlen folgen? Kannst du einen leichten Weg finden, um diese Regel zu zeigen? Wie wäre es mit einem Rechteck mit 2 Reihen und 9 Spalten? Was passiert, wenn du es von verschiedenen Blickwinkeln betrachtest?

2 Finde die möglichen Faktoren der Zahlen 18, 27, 42 indem du eine der Tabellen benutzt. Gibt es mehr als eine Möglichkeit?

3 Auf wie viele Arten kann man 48 mit ganzen Zahlen teilen? Gibt es einen einfachsten Weg ganze Zahlen als Produkt einfacher Faktoren anzuschreiben? Siehst du 2·24 und 24·2 als zwei verschiedene Arten? Oder siehst du 2·3·8 und 8·3·2 als zwei verschiedene Arten? Warum sind die beiden letzten Produkte äquivalent? Wie werden die Regeln genannt, die uns dies bestätigen?

4 Fallen dir Situationen ein, wo es wichtig sein könnte, die Fähigkeit zu haben, Faktoren von ganzen Zahlen zu finden?

5 Mit welcher Zahl müsstest du a) 12 multiplizieren um 36 zu erhalten? b) 9 multiplizieren um 72 zu erhalten? c) 15 multiplizieren um 90 zu erhalten?

6 Die Zahl 4 kann mit 2·2 faktorisiert werden und 2+2 ist 4 also ergibt die Summe der Faktoren wieder die Zahl. Kannst du eine andere Zahl mit dieser Eigenschaft finden?

7 Erstelle ähnliche Aufgaben und lasse sie von deinen Freunden in der Klasse lösen.

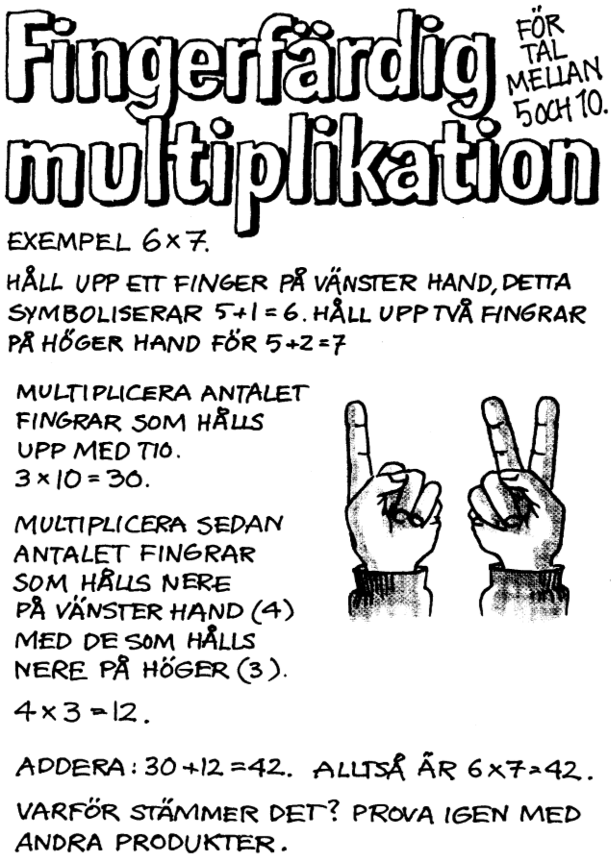
Stunde 2

Die Lehrperson leitet die Stunde mit einem Gespräch ein, das ungefähr so verläuft: Mathematiker bezeichnen sich oft als faule Personen und bevorzugen es Dinge auf die einfachste Art mit dem kleinsten Arbeitsaufwand zu lösen. Eines der Dinge, mit denen SchülerInnen in der Schule viele Jahre zu kämpfen haben ist es, die

Multiplikationstabelle einzuüben. Wie kann diese Arbeit minimiert werden? Was findest du an der Multiplikationstabelle am schwierigsten? Eine meiner Freundinnen fand 7·7 sehr leicht, da sie im Jahr 1949 die Siebener-Reihe lernte. Hast du ein Lieblingsprodukt, bei dem du dir immer sicher bist?

Heute haben wir digitale Hilfsmittel, wie Mobiltelefone und Taschenrechner oder Computer, die Multiplikationen für uns lösen. Aber was ist, wenn du etwas multiplizieren musst, und keine Hilfsmittel vorhanden sind? Auch in früheren Tagen haben sich die Leute damit auseinandergesetzt und Lösungen gefunden. Ein möglicher Weg ist es, deine Finger für die Multiplikation zu verwenden.

Dies ist eine Möglichkeit, Multiplikationen der Zahlen zwischen 5 und 10 mit denen Fingern durchzuführen:



BildFingerfärdigmultiplikation (Quelle: Grevholm (1988), S. 19:2).Für eine englische& deutsche Version siehe Anhang 1.

Probiere aus, ob das etwas für dich ist.

Diese Methode wurde einst einem/einer LehrerausbildnerIn von einem Mathematiklehrer gezeigt, der es von einigen Roma, die eine Erwachsenenbildung in Malmö Schweden absolvierten, gelernt hatte. Der Lehrer wurde von ihnen gefragt, warum diese Methode immer funktioniert. Er konnte es nicht beweisen und wandte sich deshalb an den/die LehrerausbildnerIn. Kannst du dem Lehrer erklären, warum diese Methode funktioniert?

In den nordischen Ländern war diese Methode auch als Multiplikation der einfachen Leute oder Bauernmultiplikation bekannt, da sie für all jene praktisch war, die nicht immer Papier und Stift zur Hand hatten.

(Kommentar für die Lehrperson: Der Beweis kann mit früher Algebra (siehe Anhang 3), oder indem man sich selbst durch ein systematisches probieren aller möglichen Fälle überzeugt, da hier nur eine begrenzte Anzahl von Möglichkeiten vorliegt.)

Übungen:

1 Überzeuge dich und deinen schlimmsten Gegner von der Tatsache, dass Fingermultiplikation immer die richtigen Ergebnisse liefert, wenn sie korrekt durchgeführt wird. Erkläre deinem/deiner LehrerIn, wie du das gemacht hast.

2 Versuche eine mathematische Geschichte zu erfinden, in der du das Problem mit Multiplikation lösen kannst. Bitte deinen Freund die Geschichte zu lösen. Vergleicht eure Arten zu denken. Bevorzugst du eine spezielle der Methoden? Warum?

Stunde 3:

Es gibt viele verschiedene Arten von Fingermultiplikation. Die meisten von ihnen sind seit altertümlicher Zeit bekannt und stammen von Traditionen verschiedener Länder. Suche im Internet nach Fingermultiplikation. Erkunde einige andere Arten der Fingermultiplikation. Was unterscheidet sich und was ist gleich zu unserem hier gezeigten Weg? Steht ein Beweis zur Verfügung? Erklären die Verfasser, warum diese Methode funktioniert? Kannst du eine Methode finden, die du bevorzugst? Erkläre warum.

Nun, da du die Zahlen zwischen 5 und 10 mit deinen Fingern berechnen kannst, kannst du die Dreieckige Multiplikationstabelle verkleinern, sodass nur die Fälle stehen bleiben, die du auswendig können musst. Wie kannst du die Tabelle reduzieren? Wie viele Multiplikationen sind das? Notiere die verkleinerte Tabelle.

Mit einem Taschenrechner kannst du leicht herausfinden wie viel $12 \cdot 14$ ist. Ist auch hier möglich eine Fingermultiplikation anzuwenden? Versuche Wege zu kreieren um das möglich zu machen. Kannst du irgendetwas im Internet finden, um Zahlen zwischen 11 und 15 zu multiplizieren? Kannst du etwas für noch größere Zahlen finden?

Was können dir Bücher der Geschichte der Mathematik über Fingermultiplikation erzählen? Siehe z.B. D. E. Smith, Historyofmathematics.

In welchen Ländern findet man die verschieden Arten von Fingermultiplikation? Denke darüber nach, wie diese Fähigkeit von einer Person zur nächsten weitergegeben wurde. Im Altertum geschah dies durch mündliche Überlieferungen und wahrscheinlich einer praktischen Anweisung. Kannst du es sogar einer Person beschreiben, die nicht deine Sprache spricht? Du könntest alleine mittels Gesten und Zeichen erklären. Heutzutage, wenn du etwas in schriftlicher Form erklären willst, wie du es bei deiner Internetrecherche gesehen hast, ist es viel aufwändiger, als nur mit den Fingern zu zeigen wie es funktioniert. Die Fähigkeit der Fingermultiplikation scheint heute in vielen Ländern vergessen zu sein. Warum ist das so? Und warum verlangen wir von Kindern in der Schule eine 10x10 Multiplikationstabelle auswendig zu lernen, wenn eine viel kleinere Anzahl genügen würde?

Letzte Stunde:

Die Klasse kann mit der Lehrperson eine zusammenfassende Diskussion darüber führen, was gelernt worden ist.

Hier werden nur ein paar Beispiele angeführt, die behandelt werden können:

- Welche Eigenschaften der Multiplikation haben wir gefunden?
- Können wir erklären, warum die Tabelle von 1601 so aussieht, wie sie es tut?
- Können wir dieselben Eigenschaften für die Division von Zahlen finden? Warum? Finde Beispiele.
- Wie sieht es mit der Addition und Subtraktion aus? Was denkst du? Finde Beispiele.
- Was könnte der Grund dafür sein, das Fingermultiplikation nicht mehr so bekannt ist wie früher?

Ein fruchtbarer Weg die Zusammenfassung zu handhaben ist, die SchülerInnen ihre eigene Ansicht vom stattgefundenen Lernen niederschreiben zu lassen und danach die Ergebnisse mit der gesamten Klasse zu diskutieren.

Kommentare für die LehrerInnen:

Die SchülerInnen werden vermutlich das Kommutativgesetz kennen, aber sie haben vielleicht noch keinen Namen dafür. Die Übungen geben eine Möglichkeit die Terminologie einzuführen und vielleicht für SchülerInnen die weiteren Regeln der Multiplikation zu entdecken. Wir haben zusätzliches Material für die Lehrperson angegeben, wie z.B. die Geschichte des Buches von 1601 (siehe Anhang 2), den Algebraischen Beweis (siehe Anhang 3), den systematischen Beweis, Links zu guten Seiten über Fingermultiplikation, Wege um Zahlen, die größer als 10 sind, zu multiplizieren (siehe Anhang 4), Einige Texte von Geschichtsbüchern über Fingermultiplikation (siehe Anhang 2) usw.

Die Arbeit ist für multikulturelle Aspekte nützlich, da wir wissen, dass Fingermultiplikation in vielen verschieden Gruppierungen in verschiedenen Ländern und über lange Zeitspannen benutzt wurde. Es ist eine Arbeitsweise, die in alten Tagen, mündlich oder über Gesten weitergegeben wurde und deshalb unabhängig von Sprache und sehr gegenständlich ist. SchülerInnen können ihre Eltern und Großeltern über die Tabelle interviewen und so herausfinden, ob diese die verschiedenen Tabellen kennen. Die dreieckige Tabelle, kombiniert mit Fingermultiplikation, reduziert den Lernaufwand für die Operationen der Multiplikationstabelle. Aus der Forschung wissen wir, dass die Multiplikation ein Gebiet ist, wo die Lernenden viele Schwierigkeiten haben.

Die Hauptausführung dieser Lehreinheit fand in Norwegen, in einer Schule in Kristiansand und einer in Trondheim statt. Unten sind die Berichte und Zusammenfassungen der Resultate der Hauptausführung.

Allgemeine Information:

Die Hauptausführung wurde von Kari Sofie Holvik und Camilla Normann Justnes ausgeführt und dieser Bericht beruht auf ihren schriftlichen Berichten und Bewertungen. Die Fotos wurden von Camilla Normann Justnes gemacht. In einem Meeting mit einer der Lehrerinnen vor der Ausführung, wurde diskutiert, in welcher Weise die Einheit hilfreich für die SchülerInnen sein würde. Die Lehrerin erachtete sie als große Hilfe für die Wiederholung der Multiplikation und schlug außerdem vor, dass die Einheit zur Vorbereitung der Faktorisierung von Zahlen, welche ihre SchülerInnen später dieses Semester lernen sollten, zu verwenden. Deshalb inkludierten wir einige Übungen, die mit Faktorisierung zu tun haben. Faktisch zeigen diese auch explizit, dass Multiplikation und Division inverse Operationen sind.

KarussSchule

Zuerst lernte die Hälfte der Klasse Fingermultiplikation. Die SchülerInnen waren fasziniert und dachten es mache Spaß. Sie bekamen die Aufgabe jemanden anderen die Fingermultiplikation beizubringen, aber alle vergaßen dies durchzuführen. Deshalb musste ich als Lehrerin dem Rest der Klasse die Fingermultiplikation später selbst beibringen. Niemand der SchülerInnen benutze die Methode für die Untersuchung, da sie die Multiplikationstabelle auswendig können, und somit schneller sind. Wenn wir die Methode öfters wiederholen könnte die Methode von einigen SchülerInnen bei einem Test ohne Hilfsmittel verwendet werden. Es gab weder Zeit noch Anlass, um irgendjemandem die Beweise zu zeigen. Aber ich möchte sie im neunten Jahr, wenn wir uns mit Algebra befassen vortragen.

Die letzte Sunde dieses Projektes erforschten wir andere Methoden der Multiplikation. Die SchülerInnen benutzten das Internet und suchten nach anderen Methoden, um wenigstens eine davon zu lernen und der Klasse anschließend vorzuführen. Sie arbeiteten in Paaren und waren sehr eifrig. Die für sie faszinierendste Methode, war die japanische Methode, wo man Kreuze machen und zählen kann (siehe Link), die in letzter Zeit auf Facebook gezeigt wird. Dies sind einige der gefunden Methoden:

http://vivas.us/i-promise-that-this-japanese-multiplication-technique-will-make-math-way-easier/

magic math for 7`s

Multiplication, learning the times table (Mister numbers)

No.swewe.com

Guro.sol.no/questions/naturvitenskap/matematikk/hvordan-multiplisere-firesifrede-tall-i-hodet

Reflexion der möglichen Änderungen, falls ich die Einheit nochmals verwenden möchte

Den SchülerInnen wurde zu wenig Zeit für die Bearbeitung aller Aufgaben und eine anschließende Zusammenfassung gegeben. Nächstes Mal würde ich für die Beobachtung z.B. die Fragen 1, 2 und 3 und wenn ich den Fokus auf die Untersuchung legen würde z.B. die Fragen 5, 6 und 7 stellen. Eine andere Option wäre es, die Aufgaben zu differenzieren, oder die Aufgaben per Zufallsprinzip auszuteilen und den SchülerInnen die Aufgabe zu erteilen, sich die Erkenntnisse später gegenseitig in größeren Gruppen zu erklären. Es ist in jedem Fall wichtig, dass sie Zeit bekommen, um die Mathematik miteinander zu besprechen.

Ich hätte mehr Zeit verwenden können (eine Doppelstunde), sodass mehr SchülerInnen mehr erreichen können. Die Anforderungen und Beschaffenheit der Aufgaben waren gut für den Jahrgang der SchülerInnen adaptiert. Die Einheit ist gut mit der Wiederholung von Faktorisierung, Primfaktorzerlegung und anderen Mathematischen Konzepten verbunden (Faktor, Multiplikation, Summe, usw.).

Die Stunde nach der letzten Stunde der Einheit mussten wir dazu verwenden, vom letzten Thema zu lernen, bevor wir Volumen betrachten und die zweite Stunde diese Woche wird für Übungen zu diesem Thema verwendet werden. Aber später diese Woche werden wir zu wiederholen beginnen und ich werde, wo es passt auf die Erkenntnisse dieser Einheit hinweisen und vielleicht nachfragen, ob einige SchülerInnen die anderen Multiplikationstabellen, die sie bekommen haben benutzen.

Ich werde die Fingermultiplikation inklusive Aufgabe 1 benutzen, wenn wir in Woche 18 und 19 für die Prüfungen wiederholen. Der mathematische Beweis für die Korrektheit wird einigen SchülerInnen ausgeteilt werden. Er ist für die meisten SchülerInnen der achten Schulstufe zu fortgeschritten.

Die Erkundung von anderen Multiplikationsmethoden sollte nach der Prüfungswoche (Woche 21) durchgeführt werden. Sie sind eigentlich eher für die vierte bis sechste Schulstufe relevant.

Saupstad Schule

Hier wurde die Unterrichtseinheit in einer 5. Schulstufe ausgeführt und die Lehrerin gab uns Notizen ihrer Arbeit. Eine Stunde (45 Minuten) wurde für Stunde 1 verwendet. Sie begann Stunde 1 damit, die Geschichte des alten Buches zu erzählen. Danach teile sie Kopien der Zahlen Reihen an alle SchülerInnen aus und gab ihnen fünf Minuten Zeit, diese zu studieren. Danach diskutierten die Schülerinnen in Zweiergruppen und formulierten Fragen. Die Lehrerin machte Notizen an der Tafel.

Hier die Übersetzung der Notizen aus Bild 1:

Was sehen wir?

- Es ist eine Multiplikation. Wir können die Antwort finden.
- Multiplikationstabellen von 2-9-Mal.
- Mal von links nach rechts. Teilen von rechts nach links.
- Es sieht wie ein Dreieck aus.

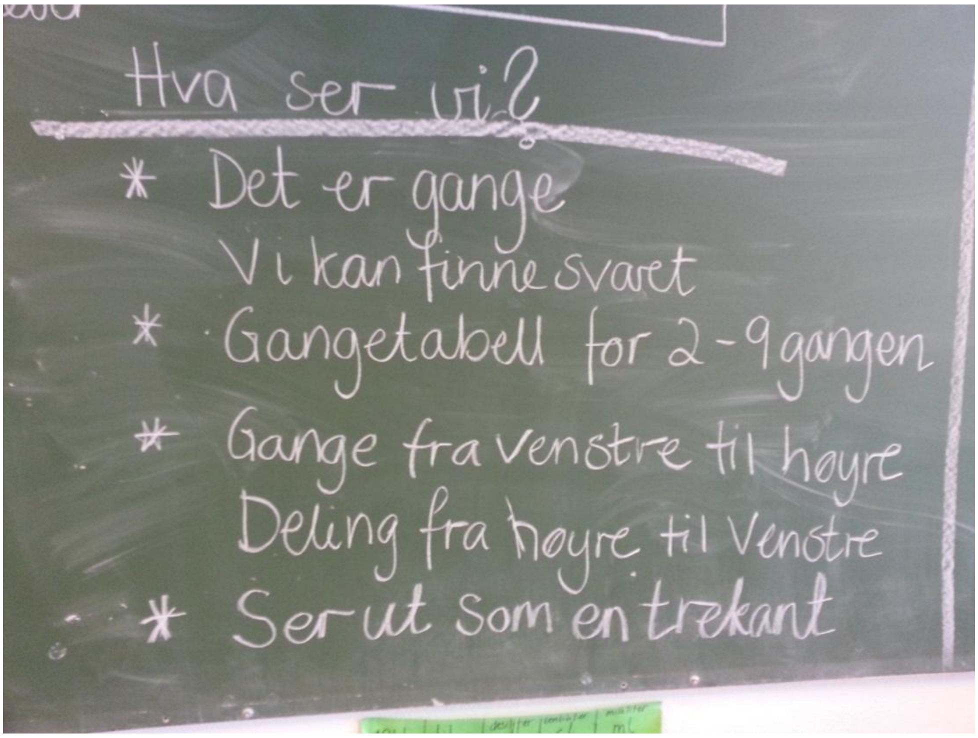


Bild 1: Lehrerinnen-Notizen zu den Schüler Innenantwortenauf „Was sehen wir?“.

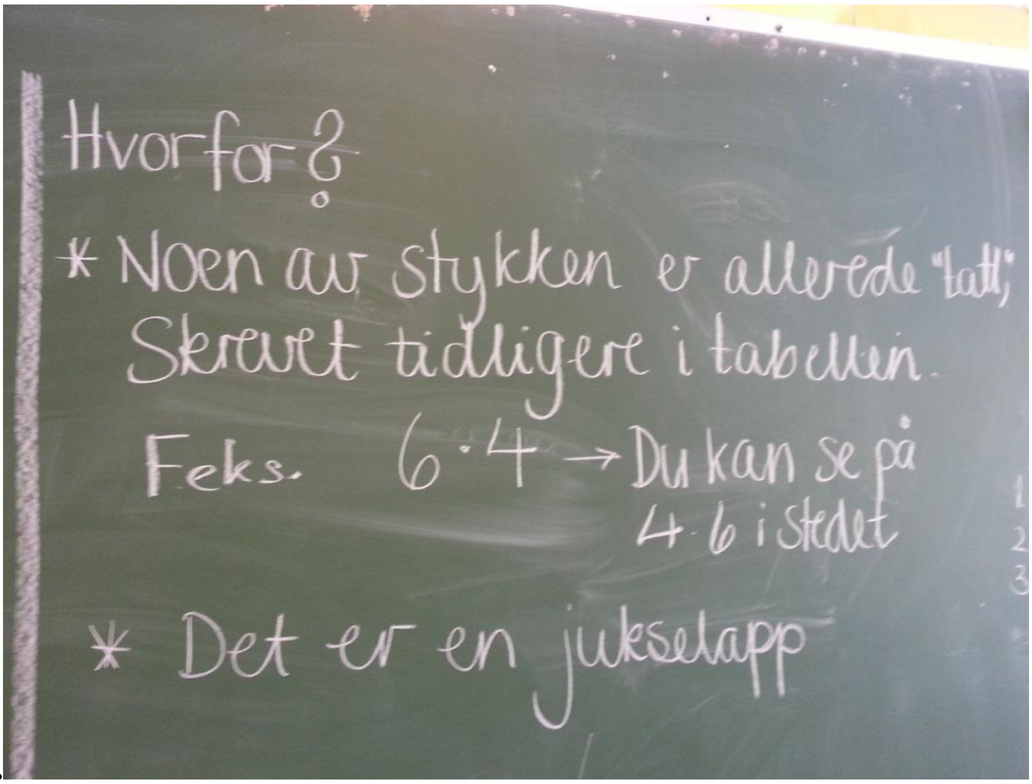


Bild 2: Lehrerinnen-Notizen zu den Schüler Innenantwortenauf„Warum?“.

Übersetzung des Textes in Bild 2:

Warum?

- Einige der Aufgaben sind bereits erledigt. Sie wurden früher in der Tabelle geschrieben. Z.B. 6·4 → siehe stattdessen 4·6.
- Es ist ein Schummelzettel.

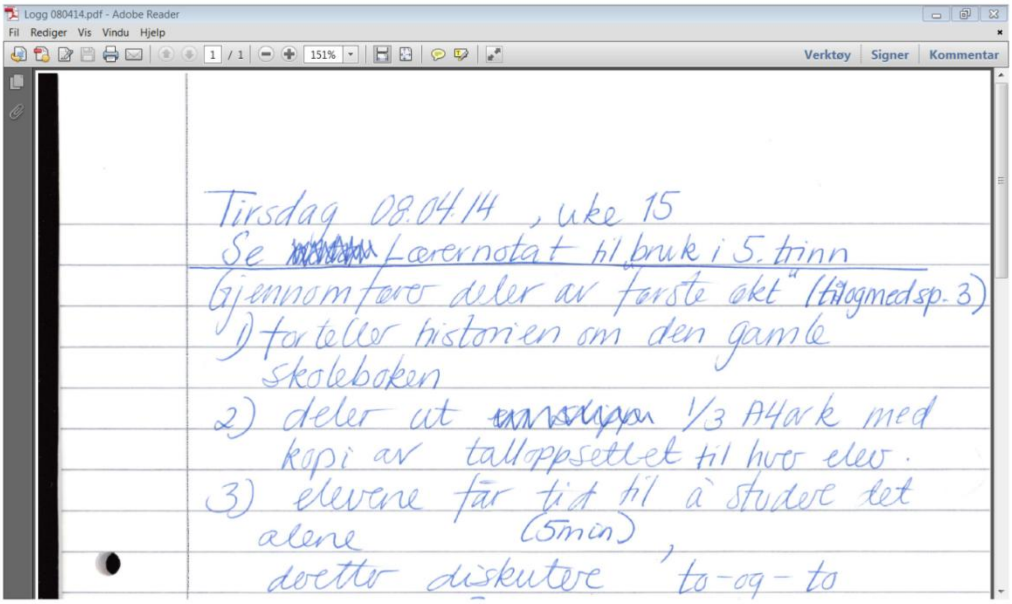


Bild 3: Teil der Planungsnotizen für die Einheit der Lehrerin

Die SchülerInnen diskutierten eifrig und einige von ihnen wollten die Zahlentabellen auf ihren Tischen behalten, um sie als Hilfsmittel zu verwenden. Einige von ihnen klebten die Tabellen in ihr Mathematikheft. Die SchülerInnen bearbeiteten anschließend Übung 1 und verwendeten die Zahlentabelle für ihre Berechnungen.

Schlussfolgerungen:

In Norwegen ist denLehrerInnendie Notwendigkeit alle Teile des Lehrplanes zu behandeln sehr bewusst. Die Prüfungen sind sehr wichtig und viel Zeit wird aufgewandt, um die SchülerInnen auf diese vorzubereiten. Eine Folge daraus ist, das LehrerInnen oft das Gefühl haben, wenig Freiraum zu haben und sich nicht trauen Dinge, die nicht direkt und explizit im Lehrplan stehen, durchzunehmen. Deshalb ist es nicht unerwartet, dass die Lehrerinnen, die die an der Ausführung teilgenommen haben, nicht viel Zeit für eine Lehreinheit verwenden, wo man nicht sofort sehen kann, wie es das Lernen der SchülerInnen unterstützt. Das erklärt, warum die Lehrerin der Karuss Schule nicht alle Teile der Einheit in ihrer Reihenfolge durchführte, sondern auf manches später zurückkommen möchte. Im Fall der Saupstad Schule haben wir leider nur den Bericht von Stunde 1 erhalten und der Rest fehlt. Wir hoffen, später noch etwas zu erhalten.

Beide Lehrerinnen berichten, dass SchülerInnen eifrig und enthusiastisch auf die Dreieckige Tabelle reagiert haben. Die SchülerInnen wollten die dreieckige Tabelle als Hilfsmittel für ihre Berechnungen behalten. Es ist interessant, dass SchülerInnen etwas, das sie unterstützt und ihnen das Lernen erleichtert als Schummelzettel ansehen. Es ist so, als müsste Mathematik schwer sein.

Als die SchülerInnen nach ergänzenden, Methoden derMultiplikation suchten, entdeckten sie auch Mathematik von verschiedenen Teilen der Erde und verschiedenen Kulturen.

Aus den Antworten der SchülerInnen zu den Fragen geht hervor, dass sie sogar im achten Schuljahr eine unreife Terminologie verwenden, wie z.B. Mal statt Multiplikation und Teilen statt Division. In Unterrichtsfolgen wie dieser ergeben sich natürliche Möglichkeiten, um mehr über die Terminologie, auch in verschiedenen Sprachen, zu lernen.

Die Lehrerinnen unterrichten in verschiedenen Altersgruppen, aber beide fanden Wege, um die Einheit ergiebig einzusetzen. Daher kann der Schwierigkeitsgrad und die Wahl des Themas als angemessen angesehen werden.

Zweite Ausführung

von Andreas Ulovec* und Therese Tomiska

Allgemeine Information

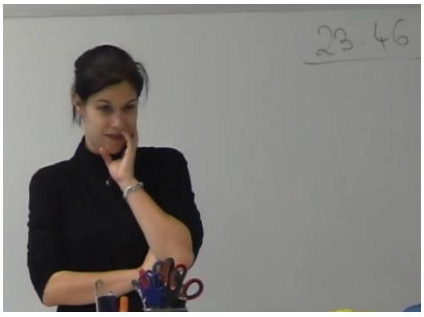
Die Unterrichtseinheit wurde von einer Mathematiklehrerin mit fünf Jahren Unterrichtserfahrung in einer Sekundarstufe II in einer Schule nahe von Wien durchgeführt. Das österreichische Projekt-Team sandte ca. 3 Wochen vor der geplanten Durchführung das Material an die Lehrerin. Die Lehrerin hatte eine fünfte (Alter 14-15 Jahre), sechste (15-16) und achte (17-18) Klasse für das Projekt zur Verfügung. Nach einem Treffen mit dem Projekt-Team, entschloss sie sich die Ausführung währen einer regulären Mathematikstunde (50 Minuten) in der sechsten Klasse durchzuführen. Acht SchülerInnen (Alter 17-18), drei davon haben Migrationshintergrund, nahmen am Unterricht teil, der gefilmt und von einem Mitglied des österreichischen Projekt-Teams beobachtet wurde. Nach der Durchführung wurde ein Interview mit der Lehrerin durchgeführt.

Ausführung in der Klasse

Die Lehrerin führte Stunde 1 wie im norwegischen Material beschrieben durch, indem sie die Multiplikationstabelle aus dem Jahr 1601 austeilte und eine Diskussion darüber startete. Diese Diskussion dauerte ca. 12 Minuten.

* Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Österreich

Gruppendiskussion über die Multiplikationstabelle.



Die Lehrerin hört sich SchülerInnenargumente an.

Die SchülerInnen waren speziell daran interessiert, warum man solche Tabellen brauchen sollte, ob solche Tabellen in der Geschichte ihrer eigenen Kultur existieren und (mathematisch) warum diese (gekürzten) Tabellen ausreichend waren und dieselbe Information wie die traditionellen, vollen, quadratischen Multiplikationstabellen haben, die sie bereits kannten. Die Information über die verschiedenen Aspekte wurden teilweise von der Lehrerin vorgegeben und teilweise zusätzlich von den SchülerInnen im Internet recherchiert.

Stunde 2 begann damit, dass die Lehrerin die Methode der Fingermultiplikation vorstellte.

Die Lehrerin führt Fingermultiplikation vor und die SchülerInnen probieren diese aus.

Die SchülerInnen wurden dann gebeten, die Methode auszuprobieren und – zusammen mit der Lehrerin – eine Erklärung zu finden, warum die Methode funktioniert (15 Minuten). Die SchülerInnen fanden mehrere Erklärungen und wollten herausfinden, ob diese Methode auch für größere Zahlen erweitert werden kann.

Die Lehrerin unterstützt die Verallgemeinerungsbemühungen der SchülerInnen.

Sie waren auch daran interessiert, ob diese oder andere „ungewöhnliche“ Multiplikationen in der Geschichte verwendet wurden. Zwei der

MigrationsschülerInnen (aus der Türkei) erwähnten eine Multiplikationsmethode, die auf Geometrie basiert, aus ihrer eigenen Kultur, welche die Lehrerin genauer erklärte.

Man sieht, dass die vier Stunden, die für die Fingermultiplikation vorgesehen waren, von der Lehrerin in einer Stunde gebracht wurde. Da keine Zeitangabe in den Materialien vorgegeben wurde und die SchülerInnen bereits über die Multiplikation, Zahlensysteme und verschiedene algebraische Methoden Bescheid wussten, wurde eine längere Dauer der Lehreinheit als unnotwendig befunden.

Interview mit der Lehrerin

Am Nachmittag, nachdem die Ausführung stattgefunden hatte, wurde ein Interview mit der Lehrerin durchgeführt. Die Lehrerin berichtete, dass die SchülerInnen direkt nach der Stunde in der Pause über die Unterrichtseinheit befragt wurden. SchülerInnen mit und ohne Migrationshintergrund äußerten sich sehr positiv. Die MigrantenschülerInnen erwähnten speziell die Chance Hintergründe zu ihrer eigenen Kultur berichten zu können, die die anderen SchülerInnen zuvor nicht wussten. Die Nicht-MigrantenschülerInnen kommentierten die verschiedenen geschichtlichen und kulturellen Referenzen positiv, die sie während der regulären Mathematikstunden normal nicht bekommen. Die Lehrerin lobte die verschiedenen Fixpunkte für kulturelle Referenzen und die Möglichkeit SchülerInnen mit Migrationshintergrund nicht nur teilnehmen zu lassen, sondern eine Informationsquelle für die anderen SchülerInnen darzustellen.

Schlussfolgerungen

Die Ausführung zeigte klar, dass SchülerInnen an mathematischen Inhalten verschiedener Kulturen interessiert sind und dass die aktive Teilnahme von SchülerInnen mit Migrationshintergrund und die Vorstellung ihres kulturellen Hintergrundes die Lernsituation bereichern kann.

Dritte Ausführung

von Hana Moraová[***] und JarmilaNovotná[***]

Ort: ZŠ Fr. Plamínkové s RVJ, Prag

Zeit: 9. September 2014

Klasse: 3. Schulstufe (2 verschiedene Klassen)

Wissen: Wissen von Multiplikationstabellen bis 5, eine der Klassen begann bereits mit den 6-9er Reihen vor den Ferien, einige Kinder erinnerten sich daran.

[***] Faculty of Education - Charles University in Prague, Czech Republic.

Die Stunden wurden auf Englisch unterrichtet, Anleitungsvideos zur Fingermultiplikation wurden vorbereitet, aber der Projektor funktionierte nicht.

Der Ablauf beider Stunden

Wiederholung der Zahlen von eins bis einhundert.

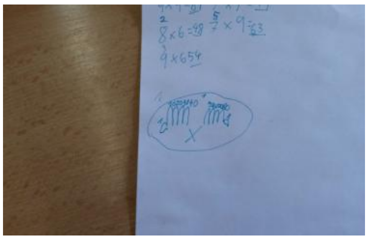
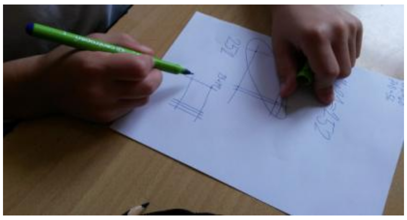
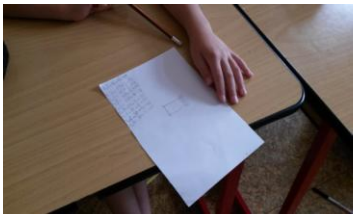
Wiederholung der Multiplikation 1-5

Demonstration (der LehrerIn) der Fingermultiplikation anhand zweier Beispiele, wobei Finger und Tafel verwendet wurden.

Die Kinder wurden angewiesen es zu versuchen, aber nur wenige verstanden. Es wurden zwei weitere Probleme vorne an der Tafel gelöst und ein/eine SchülerIn gebeten nach vorne zu kommen und mit Hilfe der Lehrperson die Aufgabe zu lösen wobei der/die Schülerin mit dem Rest der Klasse die Zahlen ansagten.

Danach wurden die SchülerInnen beauftragt alleine zu arbeiten und die Lehrperson half individuell, wo Bedarf bestand.

Danach zeigte die Lehrperson einen anderen magischen Trick, die Multiplikation von zweistelligen Zahlen mit Zuhilfenahme von Linien. Die Kinder mochten diese Methode sehr und verstanden diese leichter: weniger zählen, weniger multiplizieren sprich leichter.

Stunde 2: November, 2014

Eine der beiden **dritten Klassen**,CLIL Stunde

Aufwärmen – Zahlenreihen, anstatt der Zahl soll Bang gesagt werden, wenn die Zahl durch 3 geteilt werden kann und danach wenn die Zahl durch 4 geteilt werden kann.

Einführung – Wiederholung der Fingermultiplikation (die SchülerInnen haben inzwischen die Multiplikationsreihen gelernt, nur Motivation und Spaß)

Hauptaktivität: *Ich werde euch einen Trick zeigen*– Multiplikation von zweistelligen Zahlen mit Hilfe von Linien, welche den SchülerInnen in der vorhergegangenen CLIL-Stunde vorgestellt wurde.

Material – Kariertes Papier (um das Zeichnen der Linien einfacher zu machen und das Üben der Arbeit mit Einern, Zehnern und Hundertern, welche größer als Zehn sind, zu vereinfachen)

Die erste Linienmultiplikation wird von der Lehrperson kontrolliert, der/die Lehrerin zeichnet das Modell, die SchülerInnen zählen gemeinsam die Anzahl der Schnittpunkte, Zahlen die zehn nicht überschreiten (in Einer, Zehner, Hunderter)

Danach werden ähnliche Multiplikationen individuell durchgeführt (alle SchülerInnen mit denselben Zahlen).

Danach werden zweistellige Zahlen multipliziert bei welchen zehn in Einern, Zehnern, Hundertern überschritten wird, wobei das erste Beispiel gemeinsam an der Tafel gelöst wurde.

Danach arbeiten die SchülerInnen mit einem anderen Zahlenpaar alleine und die Lehrperson überwacht und kontrolliert das Verstehen, arbeitet mit möglichen Fehlern (die Linien werden von den SchülerInnen zu nahe beisammen gezeichnet und dies erschwert es, die Grenzen zwischen Einern, Zehnern und Hundertern zu sehen; sie vergessen die Einheiten, die größer als zehn waren zu addieren)

Das Ergebnis wird kontrolliert und mögliche Fehler ausgebessert.

Stunde 3: 13. Februar 2015

Kurze Videoaufzeichnung

Aufwärmen – Ein Lied mit Zahlen (nur für die Motivation und als Eisbrecher), Zahlenreihen, wie in der vorhergegangenen Stunde.

Einleitung: Wiederholung der Multiplikation von einstelligen Zahlen, lernen des Wortes „teilbar“, Die Kinder bekommen eine Karte mit einer Zahl und sagen: „Ich bin eine Zahl, die durch … und durch… teilbar ist, welche Zahl bin ich?“ Derjenige/Diejenige SchülerIn, der/die korrekt antwortet „ist“ die nächste Zahl.

Wiederholung der Fingermultiplikation

Hauptaktivität:

1. Eine Multiplikation von zwei zweistelligen Zahlen auf einem Blatt Papier, die Lehrperson überwacht und hilft wenn notwendig

2. Die Ergebnisse werden als Einer, Zehner und Hunderter beschrieben

3. Eine größere Zahl wird auf die Tafel geschrieben und als Zehntausender, Tausender, Hunderter, Zehner, einer (beginnend mit den Einheiten der rechten Seite) beschriftet.

4. Die Lehrperson unterweist die SchülerInnen: *Nehmt 5 Stifte in verschiedenen Farben aus eurer Federschachtel.* Die Lehrperson nimmt 5 verschiedene Kreiden. *Unterstreicht die Zehner mit einer Farbe, z.B. blau.* Die Lehrperson führt dies an der Tafel vor. *Nehmt eine andere Farbe. Unterstreicht die Hunderter*. Die Lehrperson unterstreicht die Hunderter an der Tafel … Bis sie zu den Tausendern kommen.

5. Die Lehrperson beauftragt: Nun lasst uns dreistellige Zahlen multiplizieren. Und demonstriert an der Tafel. Langsam, Schritt für Schritt, verschiedene Farben für

Einer, Zehner und Hunderter benutzend und auch auf die Schwierigkeit bei mehr als 10 Einheiten bei Einern, Zehnern, Hundertern hinweisend und wie diese zu bewältigen sind.

6. Die Lehrperson gibt zwei weitere dreistellige Zahlen vor und bittet die SchülerInnen alleine zu arbeiten. Dabei überwacht sie sorgsam den Prozess und gibt individuelle Hilfestellungen, wo diese notwendig sind. Die SchülerInnen verstehen schnell, einige von ihnen lösen die Multiplikation sehr schnell, deshalb wird ein neues Paar dreistelliger Zahlen präsentiert. Sorgsames Überwachen hilft der Vielzahl der SchülerInnen das System zu verstehen.

7. Gemeinsames kontrollieren der Ergebnisse, wobei eine Sprachschwierigkeit auftritt – einige der SchülerInnen kennen nur die Zahlen bis Hundert in Englisch, die Lehrperson schreibt eine Beispielzahl in Worten an die Tafel und die Klasse übt die Sprache.

Aufwärmen (Wiederholung der Fingermultiplikation)

Eine weitere Ausführung: 24. Februar 2014

4. Klasse, Bilder, Benutzung der interaktiven Tafel, selbe Schule

Die Lehrperson entschied sich dieselbe Lehreinheit mit SchülerInnen zu probieren, die ein Jahr älter sind (etwas höherer Englischlevel und mehr Übung im Addieren von höheren Zahlen). Die Klasse kann die Multiplikationstafeln, deshalb wurde die Stunde nicht auf die Fingermultiplikation, sondern auf Linienmultiplikation aufgebaut. Diese wurde für zweistellige und dreistellige Zahlen benutzt.

Ziel der Stunde: üben Zahlen als Einer, Zehner, Hunderter, Tausender aufzuschreiben, Multiplikation und Addition, Motivation, Mathematik auf Englisch betreiben.

Aufwärmen – Motivation und Eisbrecher, Vorzeigen der Fingermultiplikation und an wenigen Zahlen ausprobieren.

Hauptaktivität – Einen neuen Wege große Zahlen zu multiplizieren lernen.

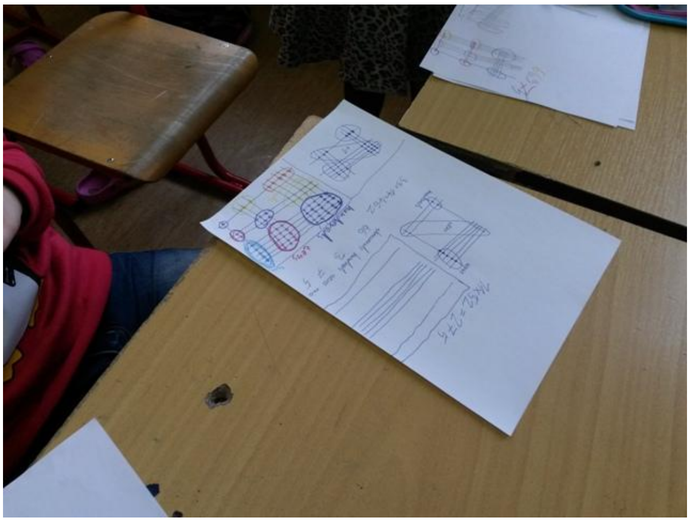
1. Einführung in die Basisterminologie – Einer, Zehner, Hunderter, …, addiere, multipliziere usw.

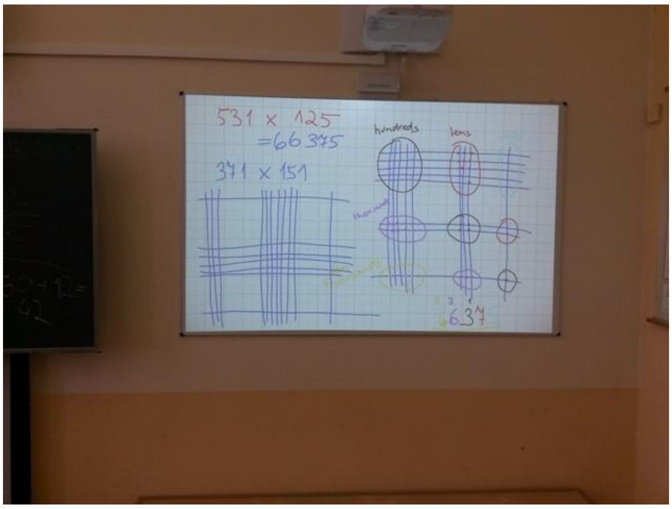
2. Auswählen von zwei zweistelligen Zahlen und das Prinzip der Linienmultiplikation am Smartboard vorführen.

3. Zwei weitere zweistellige Zahlen auswählen, individuelle Arbeit, die von der Lehrperson sorgfältig überwacht wird. Ungefähr die Hälfte der SchülerInnen entdeckte, wie man mit mehr als 10 Einern, Zehnern, Hundertern arbeitet und bekam die richtige Lösung, dem Rest der SchülerInnen wurde von der Lehrperson individuell geholfen und auf der interaktiven Tafel vorgezeigt – ein/eine SchülerIn, der/die früher fertig wurde zeichnete die Linien und der Rest wurde gemeinsam gemacht, wobei dem, was mit Eineren, Zehnern … angestellt werden musste, wenn mehr als 10 vorhanden waren, besondere Aufmerksamkeit geschenkt wurde.

4. Überleitung zu dreistelligen Zahlen: Es wird wieder von fünf verschiedenen Farben für Einer Zehner,… Gebrauch gemacht. Das erste Beispiel wurde auf dem Smartboard mit den verschiedenen Farben gezeigt.

5. Andere dreistellige Zahlen wurden vorgegeben. Die SchülerInnen arbeiteten selbstständig. Die Lehrperson überwacht und hilft individuell, kontrolliert SchülerInnen, die Einer, Zehner und Hunderter verwechseln. Ungefähr die Hälfte der Schülerinnen fand es sehr leicht, die Restlichen benötigten Hilfe und Unterstützung





Es wurden keine speziellen Schlussfolgerungen von den tschechischen Lehrer Innen gemeldet.

Schlussfolgerungen aus den drei Ausführungen

von Barbro Grevholm

Alle drei Ausführungsberichte zeigen, dass die Unterrichtseinheit gut funktioniert hat und in verschiedenen Altersgruppen von Schulstufe drei bis acht verwendet werden kann. Es wurde berichtet, dass die SchülerInnen eifrig, mit Interesse und Faszination gearbeitet haben. Die LehrerInnen scheinen inspiriert worden zu sein, die vorgeschlagenen und ähnliche Aktivitäten, die von ihnen über Multiplikation gefunden wurden auszuführen. Die LehrerInnen benutzten diese Einheit auch, um an Sprache und Terminologie zu arbeiten und sie fanden Vernetzungen und Verbindungen zwischen der Multiplikation und weiteren Bereichen der Mathematik. Die historischen Aspekte wurden gut genutzt und in einigen Klassen trugen SchülerInnen mit eigenen Erfahrungen aus ihrer Kultur zum Unterricht bei. Die Unterrichtseinheit schien etwas Neues und unentdecktes von früheren Erfahrungen zu bieten. Viele der SchülerInnen wollten die dreieckige Tabelle als Hilfsmittel für ihre Mathematik verwenden.

Ein kritischer Aspekt könnte sein, wie viel Zeit für diese Einheit aufgewandt werden sollte. Die Antwort hängt sehr von der Altersgruppe, der Lehrperson und der Perspektive mit der die Einheit verwendet wird (Wiederholung, Zusammenfassung, Erkundung) ab.

Ein weiterer diskussionswürdiger Aspekt ist, für welche Altersgruppe eine Einheit wie Fingermultiplikation besser ist. Es kommt wahrscheinlich auf das Schwierigkeitslevel, mit dem die Lehrperson die Fragen ansetzt an. Es ist offensichtlich möglich, diese von der dritten zur achten Schulstufe zu verwenden. Einige LehrerInnen haben es sogar in Algebra in der Sekundarstufe II verwendet.

Die Einheit kann verwendet werden, um SchülerInnen eigene Erfahrungen und selbst kreierte Aufgaben beisteuern zu lassen. Wenn es um die Multiplikation geht, ist es generell schwierigereigenen Probleme zu entwickeln, als mit den Operationen Addition und Subtraktion, die zu benutzen beabsichtigt wird. Die Konstruktion von Problemen kann die verschiedenen Multiplikationsaufgaben, die wir normalerweise in der Schule verwenden hervorheben. (Verschaffel& De Corte, 1996).

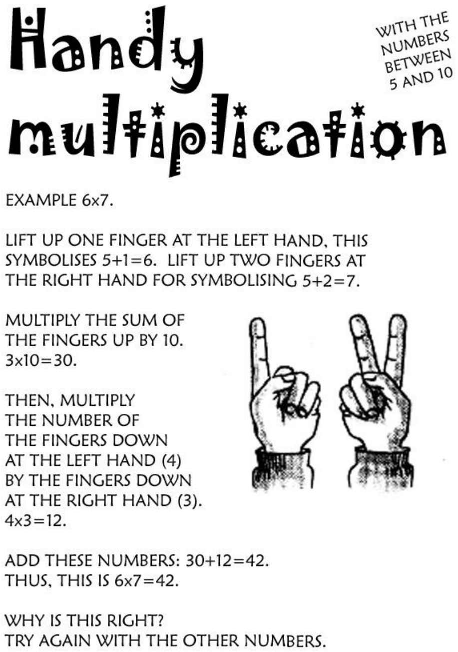
Literatur

Grevholm, B. (1988). *Utmaningen. Problem och tankenötter i matematik*. [The challenge. Problems and mindnuts in Mathematics]. Malmö: Liber.

Verschaffel, L. & De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. In *International handbook of mathematics education*, (pp. 99-137). Dordrecht: Kluwer academic Publishers.

Anähnge für die Einheit Fingermultiplikation

Anhang 1 - Englische Übersetzung der AufgabeFingerfärdigmultiplikation (Grevholm, 1988)



Deutsche Übersetzung der Fingermultiplikation:

Fingermultiplikation für Zahlen zwischen 5 und 10

Beispiel 6·7

- Hebe einen Finger der linken Hand. Das symbolisiert 5+1=6
- Hebe zwei Finger der rechten Hand. Das symbolisiert 5+2=7
- Multipliziere die Summe der Finger mit 10. D.h. 1+2=3; 3·10=30
- Multipliziere die nicht gehobenen Finger (4 links und 3 rechts) beider Hände. 4·3=12
- Addiere diese Zahlen: 30+12=42

  Deshalb ist 6·7=42

Warum ist das richtig?

Probiere mit anderen Zahlen

Anhang 2

Über das Buch Rizanesandersvon 1601 (Quelle:Shareza Hatami, 2014)

Rizanesanders‘ Buch wurde Recknekonsten, Die Kunst des Berechnens genannt

Vor ca. 412 Jahren (in 1601) schrieb Hans Larsson Rizanesander das erste schwedische Lehrbuch der Arithmetik. Eine einzige Kopie dieses handgeschriebenen Buches, *Recknekonsten*, wird in der Uppsala Universitätsbibliothek aufbewahrt.

Eine interessante Frage ist, wie viel Platz die Multiplikationstabelle im Lehrplan einnehmen soll.

Rizanesanders‘ Multiplikationstabelle beruht auf der Kommutativitätsregel der Multiplikation, die Tabelle demonstriert in all ihrer Einfachheit den Gebrauch von mathematischem und didaktischem Wissen.

Rizanesanders' Multiplikationstabelle in einer vereinfachten Version

Unten zeigen wir Rizanesanders' Tabelle auf eine Art, die vielleicht besser für den heutigen Unterricht adaptiert ist. Es ist klar ersichtlich, dass die schlechteste Tabelle die einfachste ist!

Tvåans tabell **2er-Reihe**	**Treanstabell** **3er-Reihe**	**Fyranstabell** **4er-Reihe**	**Femmanstabell** **5er-Reihe**	**Sexanstabell** **6er-Reihe**	**Sjuanstabell** **7er-Reihe**	**Åttans Tabell** **8er-Reihe**	**Nianstabell** **9er-Reihe**
2 · 2 = 4							
2 · 3 = 6							
2 · 4 = 8		4 · 4 = 16					
2 · 5 = 10		4 · 5 = 20	5 · 5 = 25				
2 · 6 = 12		4 · 6 = 24	5 · 6 = 30	6 · 6 = 36			
2 · 7 = 14		4 · 7 = 28	5 · 7 = 35	6 · 7 = 42	7 · 7 = 49		
2 · 8 = 16		4 · 8 = 32	5 · 8 = 40	6 · 8 = 48	7 · 8 = 56	8 · 8 = 64	
2 · 9 = 18		4 · 9 = 36	5 · 9 = 45	6 · 9 = 54	7 · 9 = 63	8 · 9 = 72	9 · 9 = 81

In Rizanesanders' Tabelle werden die 1er-Reihe und 10er-Reihe nicht verwendet. Man kann annehmen, dass er von den LehrerInnen und SchülerInnenforderte darüber zu reflektieren. Er benutzt einfach das Kommutativitätsgesetz der Multiplikation, das mehr als einmal in der 10 Mal 10 Tabelle vorkommt.

Eine Multiplikationstabelle, die Rizanesanders' Multiplikationstabelle ähnlich ist, kann in den ersten gedruckten, schwedischen Lehrbüchern der Arithmetik gefunden werden. Eine von Aurelius von 1614. Eine weitere ähnliche Multiplikationstabelle existiert in Nils Buddaeus' (1595-1653) Lehrbuch. Seine Multiplikationstabelle erinnert an Rizanesanders'Multiplikationstabelle.

1

2 4

3 6 9

4 8 12 16

5 10 15 20 25

6 12 18 24 30 36

7 14 21 28 35 42 49

8 16 24 32 40 48 56 64

9 18 27 36 45 54 63 72 81

Unten ist die 2er-Reihe rot markiert und die weiteren Farben zeigen die 3er-, 4er, 5er-, 6er-, 7er- 8er- und schlussendlich die 9er-Reihe.

1

24

3 69

4 81216

51015 2025

612 18 243036

714 21 28354249

81624 3240 48 5664

9 1827 364554 637281

Es ist interessant zu fragen, von wo die Schedischen Lehrbuchautoren die Idee bekamen, die Tabelle in dreieckiger Form zu präsentieren. Man könnte hypothesieren, dass sie von Deutschland kam, da viele Gelehrte dieser Zeit an deutschen Universitäten studierten. Und von woher kam die Idee in diesem Fall nach Deutschland? Wir wissen es im Moment nicht, aber es wäre interessant mehr darüber herauszufinden.

Anhang 3

Überlegen wir uns, dass wir zwei Zahlen a und b multiplizieren wollen, und beide zwischen 5 und 10 sind.

Wenn wir der Anleitung folgen ist die Anzahl der Finger die wir hochhalten (a-5)+(b-5)=a+b-10

Diese Zahl multiplizieren wir mit 10 um 10(a+b-10) zu erhalten.

Die Anzahl der Finger, die wir nach unten halten ist (10-a) und (10-b) und durch multiplizieren dieser Zahlen bekommen wir $(10-a)\cdot(10-b)=100-10(a+b)+a\cdot b$

Die Summe der beiden Zahlen ist $10(a+b)-100+100-10(a+b)+a\cdot b=a\cdot b$, was das Produkt ist, das wir kalkulieren wollten.

So haben wir bewiesen, dass für alle Zahlen a und b zwischen 5 und10 die Anleitung das Produkt $a\cdot b$ ergibt.

Anhang 4

Einige nützliche Links zur Fingermultiplikation:

http://ncm.gu.se/media/namnaren/npn/arkiv_xtra/09_2/mattfolk.pdf

http://gwydir.demon.co.uk/jo/numbers/finger/multiply.htm

http://scimath.unl.edu/MIM/files/MATExamFiles/WestLynn_Final_070411_LA.pdf

http://threesixty360.wordpress.com/2007/12/31/three-finger-tricks-for-multiplying/

http://www.dccc.edu/sites/default/files/faculty/sid_kolpas/mathteacherfingers.pdf