

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΜΕ ΤΑ ΔΑΧΤΥΛΑ

από Barbro Grevholm*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Περιοχή μελέτης της ενότητας αυτής αποτελεί ο Πολλαπλασιασμός στο πλαίσιο διαφορετικών προσεγγίσεων (ιστορία, κουλτούρα, παραδόσεις, χρήσεις εργαλείων και βιβλίων), η χρήση συγκεκριμένων εργαλείων στους υπολογισμούς, η χρήση της πρώιμης άλγεβρας στο σχηματισμό κανόνων πολλαπλασιασμού και απόδειξης μαθηματικών αποτελεσμάτων, οι διαφορετικοί τρόποι απόδειξης στα μαθηματικά και το μαθηματικό συλλογισμό.

Πιλοτική εφαρμογή με δασκάλους

Η πρώτη εφαρμογή του προγράμματος έγινε σε δυο σχολεία στη Νορβηγία με δυο διαφορετικούς καθηγητές των μαθηματικών. Η δεύτερη εφαρμογή έγινε στην Αυστρία και η τρίτη στην Τσεχία. Τα αναμενόμενα μαθηματικά θέματα προς ανάπτυξη είναι η αριθμητική του πολλαπλασιασμού, οι πράξεις και οι κανόνες, οι παράγοντες, τα γινόμενα και η παραγοντοποίηση, η απόδειξη και η διαδικασία της απόδειξης η ιστορία των μαθηματικών, μεταγνωστικές διεργασίες όσον αφορά στη εκμάθηση των μαθηματικών και κατανόηση των μαθηματικών σε σχέση με την απλή αποστήθιση.

Στόχοι της ενότητας

Οι στόχοι της ενότητας είναι να κάνει τους μαθητές να στοχαστούν αναφορικά με τη διαδικασία του πολλαπλασιασμού, να συνειδητοποιήσουν τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού και να δουν πώς συνδέονται ο πολλαπλασιασμός και οι άλλες

* Σχολή Μηχανικής και Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών Επιστημών, Πανεπιστήμιο Agder, Νορβηγία.

θεματικές των μαθηματικών. Οι μαθητές πρέπει επίσης να σκεφτούν τι χρειάζεται να απομνημονεύσουν και τι μπορούν να αναπαράγουν με διαφορετικά εργαλεία ή βοηθήματα. Οι μαθητές επίσης χρειάζεται να προσέξουν ότι τα μαθηματικά δομούνται και χρησιμοποιούνται από απλούς ανθρώπους σε πολλά μέρη του κόσμου. Παίρνοντας συνεντεύξεις από τα μέλη της οικογένειάς τους μπορούν να μάθουν πώς χειρίζονται τον στις χώρες τους.

Βασική πιλοτική εφαρμογή

από Barbro Grevholm

Η πρόταση: *Αρχικό κείμενο της διδακτικής ενότητας Πολλαπλασιασμός με τα Δάχτυλα*

Αρχή της ενότητας:

Μάθημα 1

Δίνεται στους μαθητές μια εικόνα με μια σειρά από αριθμούς σε τριγωνική μορφή από ένα βιβλίο του 1601 που είναι γραμμένο με το χέρι (13 χρόνια πριν να τυπωθεί το πρώτο βιβλίο μαθηματικών στη Σουηδία). Βλέπε φωτογραφία παρακάτω. Μπορείτε να πείτε και την ιστορία του βιβλίου, βλέπε Παράρτημα 2. Με πρωτοβουλία του εκπαιδευτικού, ξεκινά ομαδική συζήτηση για την εικόνα και στηρίζεται στις ακόλουθες ερωτήσεις (αφού οι μαθητές είχαν χρόνο να μελετήσουν το αριθμητικό μοτίβο):

$$\begin{array}{c}
 2 \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \\ 14 \\ 16 \\ 18 \end{array} \right. \\
 3 \left\{ \begin{array}{c} 9 \\ 12 \\ 15 \\ 18 \\ 21 \\ 24 \\ 27 \end{array} \right. \\
 4 \left\{ \begin{array}{c} 16 \\ 20 \\ 24 \\ 28 \\ 32 \\ 36 \end{array} \right. \\
 5 \left\{ \begin{array}{c} 25 \\ 30 \\ 35 \\ 40 \\ 45 \end{array} \right. \\
 6 \left\{ \begin{array}{c} 36 \\ 42 \\ 48 \\ 54 \end{array} \right. \\
 7 \left\{ \begin{array}{c} 49 \\ 56 \\ 63 \end{array} \right. \\
 8 \left\{ \begin{array}{c} 64 \\ 72 \end{array} \right. \\
 9 \{ 81 \}
 \end{array}$$

- 1 Τι βλέπεις σε αυτή την αριθμητική τοποθέτηση; Έχεις δει κάτι παρόμοιο;
- 2 Για ποιο λόγο μπορεί να παρουσιάζονται οι αριθμοί με αυτόν τον τρόπο; Πώς συναντάς μια τέτοια τοποθέτηση όταν μαθαίνεις μαθηματικά;
- 3 Ποιες ιδιότητες των αριθμών κάνουν δυνατή την αναπαράσταση του πίνακα στο παλιό βιβλίο; Ποιος μπορεί να είναι ο λόγος που δεν χρησιμοποιούνται τέτοιες σύντομες τοποθετήσεις και σήμερα;

Σχόλια για τον δάσκαλο: Μπορούμε να περιμένουμε ότι οι μαθητές θα αναγνωρίσουν τη σειρά με τα αποτελέσματα στον πίνακα 2 και στον πίνακα 3. Ίσως το συνδέσουν με τον πίνακα της προπαίδειας; Εδώ ο δάσκαλος μπορεί να ζητήσει από την τάξη να γράψει τον πίνακα της προπαίδειας με ισοδυναμίες 10 επί 10 και σε αυτόν τον πίνακα να χρωματίσει αυτά τα γινόμενα που υπάρχουν στο τριγωνικό μοτίβο. Ύστερα από περαιτέρω έρευνα και συζήτηση, η τάξη ίσως ανακαλύψει ότι τα γινόμενα που λείπουν από το τριγωνικό μοτίβο υπάρχουν ήδη σε κάποιους από τους τωρινούς πίνακες. Έτσι, όλα τα αντίγραφα των πολλαπλασιασμών αφαιρούνται από το τριγωνικό μοτίβο.

Τώρα ο δάσκαλος μπορεί να εξηγήσει στους μαθητές ότι αυτοί οι πίνακες μπορούν να χρησιμοποιηθούν με δυο τρόπους: για να υπολογίσουν ένα γινόμενο δυο ακέραιων αριθμών ή να βρουν από έναν αριθμό που τον βλέπουν ως γινόμενο ποιοι είναι οι παράγοντες αυτού του αριθμού. Δηλαδή, κάποιος μπορεί να υπολογίσει πόσο κάνει 3 επί 4 ή να ρωτήσει ποιοι είναι οι παράγοντες σε ένα δεδομένο αριθμό όπως το 12. Εδώ ο δάσκαλος μπορεί να θέλει να επαναλάβει την ορολογία παράγοντας και γινόμενο που χρησιμοποιούνται στον πολλαπλασιασμό και να αντιληφθούν οι μαθητές τη διαφορά από την πρόσθεση που μιλάμε για όρους και άθροισμα.

Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιείτε οποιοδήποτε πίνακα για να υπολογίσετε: α) $2 \cdot 9$ και $9 \cdot 2$ β) $8 \cdot 7$ και $7 \cdot 8$ γ) $5 \cdot 8$ και $8 \cdot 5$. Τι παρατηρείτε; Ποιο είναι το όνομα αυτού του κανόνα που ακολουθεί ο πολλαπλασιασμός των αριθμών; Μπορείτε να βρείτε έναν εύκολο τρόπο να τον επεξηγήσετε; Τι λέτε για ένα ορθογώνιο με 2 σειρές και 9 στήλες; Τι συμβαίνει εάν το κοιτάξετε από διαφορετικές γωνίες;
2. Βρείτε τους πιθανούς παράγοντες στους αριθμούς 18, 27, 42 χρησιμοποιώντας κάποιον από αυτούς τους πίνακες. Υπάρχουν περισσότερες από μια επιλογές;
3. Με πόσους τρόπους μπορείς να χωρίσεις το 48 σε ακέραιους παράγοντες; Υπάρχει ένας πιο εύκολος τρόπος να γράψεις έναν ακέραιο ως γινόμενο πρώτων παραγόντων; Θεωρείς το $2 \cdot 24$ και το $24 \cdot 2$ δυο διαφορετικούς τρόπους; Ή βλέπεις το $2 \cdot 3 \cdot 8$ και το $8 \cdot 3 \cdot 2$ ως δυο διαφορετικούς τρόπους; Γιατί είναι τα δυο τελευταία γινόμενα ίσα; Πώς ονομάζονται οι κανόνες που μας το επιβεβαιώνουν;
4. Μπορείς να σκεφτείς μια περίπτωση όπου είναι σημαντικό να μπορείς να βρεις τους παράγοντες από έναν ακέραιο αριθμό;
5. Με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσεις α) το 12 για να πάρεις το 36; β) το 9 για να πάρεις το 72; γ) το 15 για να πάρεις το 90;
6. Ο αριθμός 4 μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $2 \cdot 2$ και $2+2$ κάνει 4 και έτσι το άθροισμα των παραγόντων να είναι ίσο με τον αριθμό. Μπορείτε να βρείτε έναν άλλο αριθμό με αυτή την ιδιότητα;
7. Τώρα μπορείτε να κατασκευάσετε παρόμοια προβλήματα και να ζητήσετε από τους φίλους σας στην τάξη να τα λύσουν.

Δεύτερο μάθημα

Ο δάσκαλος κάνει μια εισαγωγή στην εργασία με μια συζήτηση που εκτυλίσσεται περίπου έτσι: Οι μαθηματικοί συχνά αυτοαποκαλούνται τεμπέληδες και προσπαθούν να κάνουν τα πράγματα όσο πιο απλά γίνεται και να δουλεύουν όσο πιο λίγο μπορούν. Ένα από τα πράγματα που δυσκολεύει τους μαθητές στο σχολείο εδώ και πολλά χρόνια είναι να μάθουν την προπαίδεια. Πώς μπορεί να μειωθεί η δουλειά που απαιτείται στην εκμάθηση της προπαίδειας; Τι βρήκες πιο δύσκολο από την προπαίδεια; Ένας φίλος μου βρήκε το 7×7 πολύ εύκολο, καθώς ήταν το έτος 1949 όταν έμαθε τον πίνακα του 7. Έχεις ένα αγαπημένο γινόμενο που το ξέρεις πάντα σίγουρα;

Σήμερα έχουμε ψηφιακά εργαλεία όπως το κινητό και την αριθμομηχανή ή τον υπολογιστή για να κάνουν τους πολλαπλασιασμούς για εμάς. Αλλά τι γίνεται αν πρέπει να πολλαπλασιάσεις και δεν υπάρχουν εργαλεία εκεί; Λοιπόν, οι άνθρωποι το σκέφτηκαν αυτό και στην παλιά εποχή και βρήκαν λύσεις. Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσεις τα δάχτυλά σου για τον πολλαπλασιασμό.

Αυτός είναι ο τρόπος για να πολλαπλασιάσεις οποιονδήποτε αριθμό ανάμεσα στο 5 και το 10 χρησιμοποιώντας τα δάχτυλά σου:

Fingerfärdig multiplikation

FÖR
TAL
MELLAN
5 OCH 10.

EXEMPEL 6×7 .

HÅLL UPP ETT FINGER PÅ VÄNSTER HAND, DETTA
SYMBOLISERAR $5+1=6$. HÅLL UPP TVÅ FINGRAR
PÅ HÖGER HAND FÖR $5+2=7$

MULTIPLICERA ANTALET
FINGRAR SOM HÅLLS
UPP MED 10.
 $3 \times 10 = 30$.

MULTIPLICERA SEDAN
ANTALET FINGRAR
SOM HÅLLS NERE
PÅ VÄNSTER HAND (4)
MED DE SOM HÅLLS
NERE PÅ HÖGER (3).

$4 \times 3 = 12$.

ADDERA: $30 + 12 = 42$. ALLTSÅ ÄR $6 \times 7 = 42$.

VARFÖR STÄMMER DET? PROVA IGEN MED
ANDRA PRODUKTER.



Εικόνα Fingerfärdig multiplikation (Πηγή: Grevholm (1988), p. 19:2).

Για μετάφραση της άσκησης στα αγγλικά βλέπε παράρτημα 1.

Δοκίμασέ το και δες αν σε βολεύει.

Αυτή τη μέθοδο την έδειξε κάποτε σε μάθημα εκπαίδευσης εκπαιδευτικών ένας δάσκαλος των μαθηματικών που την είχε μάθει από κάποιους Ρομά που πήγαν σε σχολείο δεύτερης ευκαιρίας στο Malmö στη Σουηδία. Οι συμμαθητές του ζήτησαν να τους εξηγήσει γιατί αυτή η μέθοδος λειτουργεί πάντα. Ο δάσκαλος όμως δεν μπόρεσε να τους το αποδείξει. Μπορείς να βοηθήσεις το δάσκαλο να εξηγήσει γιατί λειτουργεί πάντα αυτή η μέθοδος;

Στις Σκανδιναβικές χώρες η μέθοδος ήταν επίσης γνωστή ως ο πολλαπλασιασμός του αγρότη ή του γεωργού, καθώς ήταν βολική για οποιονδήποτε δεν είχε άμεση πρόσβαση σε χαρτί και μολύβι.

Σχόλιο για τον δάσκαλο: Η απόδειξη μπορεί να γίνει με πρώιμη άλγεβρα (βλέπε παράρτημα 3) ή πείθοντας τον εαυτό μας ότι όλες οι πιθανές περιπτώσεις είναι σωστές με συστηματική προσπάθεια, καθώς υπάρχουν μόνο λίγες περιπτώσεις εδώ).

Ασκήσεις

1. Να πείσετε τον εαυτό σας και τον χειρότερο εχθρό σας για το γεγονός ότι ο πολλαπλασιασμός με τα δάχτυλα πάντα δίνει το σωστό αποτέλεσμα αν γίνει σωστά. Εξηγήστε στον δάσκαλό σας πώς το κάνατε.
2. Προσπαθήστε να σκεφτείτε μια μαθηματική ιστορία όπου μπορείτε να λύσετε το πρόβλημα με πολλαπλασιασμό. Ζητήστε από το φίλο σας να το λύσει. Συγκρίνετε τις μεθόδους σκέψης σας. Προτιμάτε μια συγκεκριμένη μέθοδο; Για ποιο λόγο;

Τρίτο μάθημα

Υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι πολλαπλασιασμού με τα δάχτυλα, οι περισσότεροι είναι γνωστοί από τους ιστορικούς χρόνους και προέρχονται από παραδόσεις διαφορετικών χωρών. Ψάξε στο διαδίκτυο για τον πολλαπλασιασμό με τα δάχτυλα. Βρες κάποιους άλλους τρόπους πολλαπλασιασμού με δάχτυλα. Ποιες ομοιότητες και διαφορές υπάρχουν σε σύγκριση με τον τρόπο που δείξαμε εδώ; Υπάρχει απόδειξη; Εξηγούν οι συγγραφείς γιατί λειτουργεί η μέθοδος; Βρήκες μια μέθοδο που προτιμάς από τις άλλες; Εξήγησε γιατί.

Τώρα όταν μπορείς να πολλαπλασιάσεις ανάμεσα στο 5 και στο 10 με τα δάχτυλά σου, πώς μπορείς να μειώσεις τον τριγωνικό πίνακα πολλαπλασιασμού μόνο για τις περιπτώσεις που χρειάζεται να μάθεις απ' έξω; Πόσοι διαφορετικοί πολλαπλασιασμοί είναι; Φτιάχνε τον περιορισμένο πίνακα.

Με μια αριθμομηχανή μπορείς εύκολα να βρεις πόσο κάνει $12 \cdot 14$. Θα ήταν αυτό δυνατό και με τον πολλαπλασιασμό με τα δάχτυλα; Προσπάθησε να βρεις έναν τρόπο να το κάνεις. Υπάρχει κάτι στο διαδίκτυο για τον πολλαπλασιασμό των αριθμών ανάμεσα στο 11 και το 15; Βρήκες κάτι για ακόμη μεγαλύτερους αριθμούς;

Τι λένε τα βιβλία ιστορίας των μαθηματικών για τον πολλαπλασιασμό με τα δάχτυλα; Βλέπε για παράδειγμα το βιβλίο του D. E. Smith, Ιστορία των Μαθηματικών.

Σε ποιες χώρες βρίσκεις τις διαφορετικές μεθόδους πολλαπλασιασμού; Σκέψου τον τρόπο που έμαθαν αυτή τη δεξιότητα οι άνθρωποι ο ένας από τον άλλον. Τον παλιό καιρό ήταν με προφορική επικοινωνία και πιθανόν έδειχναν πώς να το κάνουν με πολύ πρακτικό τρόπο. Θα μπορούσες ίσως να το περιγράψεις και σε κάποιον που δεν μιλάει τη γλώσσα σου; Μπορείς να εξηγήσεις με χειρονομίες και νεύματα. Σήμερα, αν θέλουμε να περιγράψουμε τη μέθοδο γραπτώς, όπως στο διαδίκτυο για παράδειγμα, χρειάζεται πολύ περισσότερη προσπάθεια από το να το δείξεις με τα δάχτυλά σου. Η δεξιότητα του πολλαπλασιασμού με τα δάχτυλα φαίνεται ότι έχει ξεχαστεί σε πολλές χώρες σήμερα. Για ποιο λόγο; Και γιατί ζητάμε από τα παιδιά στο σχολείο να μάθουν έναν πίνακα με 10·10 πολλαπλασιασμούς όταν μπορούμε να το κάνουμε με πολύ λιγότερους χειρισμούς;

Τελικό μάθημα

Ο δάσκαλος και η τάξη μπορούν να κάνουν μια συζήτηση συνοψίζοντας τι έχουν μάθει.

Μερικά παραδείγματα πώς μπορεί να γίνει αυτό:

- Ποιες ιδιότητες του πολλαπλασιασμού βρήκαμε;
- Μπορούμε να εξηγήσουμε γιατί ο πίνακας από το 1601 είναι έτσι;
- Μπορούμε να βρούμε τις ίδιες ιδιότητες για τη διαίρεση αριθμών; Γιατί; Βρείτε παραδείγματα.
- Τι γίνεται στην περίπτωση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης; Ποια είναι η γνώμη σας; Βρείτε παραδείγματα.
- Ποια μπορεί να είναι η αιτία για το γεγονός ότι ο πολλαπλασιασμός με τα δάχτυλα δεν είναι γνωστός πια;

Ένας αποτελεσματικός τρόπος να γίνει η σύνοψη είναι να αρχίσουν οι μαθητές να γράφουν τις απόψεις τους για το τι έμαθαν και μετά να συζητηθεί σε ολόκληρη την τάξη.

Σχόλια για το δάσκαλο:

Οι μαθητές πιθανόν να ξέρουν για την αντιμεταθετική ιδιότητα, αλλά μπορεί να μην ξέρουν πώς λέγεται. Οι ασκήσεις προσφέρουν την ευκαιρία της εισαγωγής της ορολογίας και ενδεχομένως και την ευκαιρία να ανακαλύψουν οι μαθητές άλλους νόμους για τον πολλαπλασιασμό. Έχουμε δώσει επιπρόσθετο υλικό για το δάσκαλο, όπως για παράδειγμα την ιστορία του βιβλίου του 1601 (στο παράρτημα 2), την αλγεβρική απόδειξη (βλέπε παράρτημα 3), τη συστηματική απόδειξη, συνδέσμους για ωραίες ιστοσελίδες για τον πολλαπλασιασμό με τα δάχτυλα, τρόπους να πολλαπλασιάζουν αριθμούς μεγαλύτερους από 10 (παράρτημα 4), μερικά κείμενα από βιβλία ιστορίας για τον πολλαπλασιασμό με τα δάχτυλα (παράρτημα 2) κλπ.

Η προσέγγιση που υιοθετείται στο πλαίσιο της ενότητας αυτής είναι χρήσιμη από πολυπολιτισμική πλευρά, καθώς ξέρουμε ότι έχει χρησιμοποιηθεί από πολλές διαφορετικές ομάδες ανθρώπων σε διαφορετικές χώρες για μεγάλα χρονικά

διαστήματα. Αποτελεί έναν τρόπο εργασίας που έχει μεταφερθεί προφορικά ή με χειρονομίες από τα παλιά χρόνια, είναι δηλαδή ανεξάρτητος από τη γλώσσα και ορίζεται με έναν απτό και συγκεκριμένο τρόπο. Οι μαθητές μπορούν να πάρουν συνεντεύξεις από τους γονείς και τους παππούδες τους σχετικά με τον πίνακα και να αναζητήσουν εάν εκείνοι γνωρίζουν τους διαφορετικούς πίνακες. Ο τριγωνικός πίνακας σε συνδυασμό με τον πολλαπλασιασμό με τα δάχτυλα μειώνει μέρος από την αποστήθιση των πράξεων στον πίνακα του πολλαπλασιασμού. Από τις έρευνες γνωρίζουμε ότι ο πολλαπλασιασμός είναι ένα θέμα που δυσκολεύει πολύ τους μαθητές.

Η βασική πιλοτική εφαρμογή αυτής της διδακτικής ενότητας έγινε στην Νορβηγία, σε ένα σχολείο στο Kristiansand και ένα στο Trondheim. Ακολουθούν οι αναφορές και οι περιλήψεις των αποτελεσμάτων της κύριας πιλοτικής εφαρμογής.

Γενικές πληροφορίες:

Η βασική πιλοτική εφαρμογή διεξήχθη από τις Kari Sofie Holvik και Camilla Normann Justnes και αυτή η αναφορά βασίζεται στις γραπτές αναφορές και στις αξιολογήσεις τους. Τις φωτογραφίες πήρε η Camilla Normann Justnes. Σε συνάντηση με μια από τις εκπαιδευτικούς πριν την πιλοτική εφαρμογή, συζητήσαμε με ποιους τρόπους η ενότητα θα ήταν χρήσιμη για τους μαθητές. Η καθηγήτρια θεώρησε μεγάλη βοήθεια να γίνει επανάληψη για τον πολλαπλασιασμό και επίσης πρότεινε να το χρησιμοποιήσει για να προετοιμάσει την παραγοντοποίηση των αριθμών που θα μάθαιναν οι μαθητές της αργότερα το ίδιο εξάμηνο. Έτσι συμπεριλάβαμε κάποιες ασκήσεις που ασχολούνται με την παραγοντοποίηση. Οι ασκήσεις αυτές ξεκαθαρίζουν επίσης ότι ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις.

Από το σχολείο Karuss

Οι μισοί μαθητές της τάξης έμαθαν για τον πολλαπλασιασμό με τα δάχτυλα. Οι μαθητές ενθουσιάστηκαν και το βρήκαν διασκεδαστικό. Τους ανατέθηκε να το διδάξουν στους υπόλοιπους μαθητές, αλλά όλοι τους το ξέχασαν. Έτσι, εγώ, σαν εκπαιδευτικός, έπρεπε να το διδάξω στην υπόλοιπη τάξη αργότερα. Κανένας από τους μαθητές δεν χρησιμοποίησε τη μέθοδο στις εξετάσεις, καθώς έχουν τον πίνακα του πολλαπλασιασμού στο μυαλό τους και είναι πιο γρήγορο στη χρήση. Αν επαναλαμβάναμε αυτή τη μέθοδο συνέχεια, θα μπορούσαν κάποιοι μαθητές να τη χρησιμοποιήσουν σε ένα τεστ όπου δεν θα υπήρχαν βοηθήματα. Δεν υπήρχε χρόνος ούτε και λόγος να δείξουμε αποδείξεις σε κανένα. Αλλά θα ήθελα να το κάνω στην 9^η τάξη όταν δηλαδή μελετάμε άλγεβρα.

Στο τελευταίο μάθημα αυτού του προγράμματος εξερευνήσαμε άλλες μεθόδους για πολλαπλασιασμό. Οι μαθητές χρησιμοποιούν το διαδίκτυο και έψαξαν για άλλες μεθόδους, ώστε να μάθουν τουλάχιστον μια από αυτές και να τη δείξουν μετά στην τάξη. Δούλεψαν σε ζευγάρια και ήταν πολύ πρόθυμοι. Η μέθοδος που τους άρεσε περισσότερο ήταν η Γιαπωνέζικη μέθοδος, την οποία είχαν δει στο Facebook

πρόσφατα, με την οποία μπορείς να μετρήσεις και να κάνεις σταυρούς (βλέπε σύνδεσμο). Αυτές είναι μερικές από τις μεθόδους που βρήκαν:

- <http://vivas.us/i-promise-that-this-japanese-multiplication-technique-will-make-math-way-easier/>
- Μαγικά μαθηματικά για την 7^η τάξη
- Πολλαπλασιασμός, μαθαίνοντας χρονοδιαγράμματα (οι Κύριοι αριθμοί)
- No.swewe.com
- Guro.sol.no/questions/naturvitenskap/matematikk/hvordan-multiplisere-firesifrede-tall-i-hodet

Σκέψεις για πιθανές αλλαγές εάν χρησιμοποιήσω την ενότητα αυτή μια επόμενη φορά.

Δεν υπήρχε αρκετός χρόνος για να κάνουν οι μαθητές όλες τις δραστηριότητες και στη συνέχεια να κάνουμε μια περίληψη. Την επόμενη φορά θα χρησιμοποιούσα μερικές ερωτήσεις, για παράδειγμα την 1, 2, και 3 εάν απέβλεπα στις εξετάσεις και την 5, 6, και 7 εάν ήθελα να επικεντρωθώ σε διερευνήσεις. Μια άλλη εναλλακτική είναι να διαφοροποιηθούν οι δραστηριότητες. Επίσης, μπορούν να μοιραστούν τυχαία και να ζητηθεί από τους μαθητές να τις εξηγήσουν ο ένας στον άλλο σε μεγαλύτερες ομάδες μετά. Σε οποιαδήποτε περίπτωση, είναι σημαντικό να έχουν χρόνο να συζητήσουν για τα μαθηματικά όλοι μαζί.

Θα μπορούσα να είχα χρησιμοποιήσει περισσότερο χρόνο (ένα διπλό μάθημα) έτσι ώστε περισσότεροι μαθητές να κατάφεραν περισσότερα. Το επίπεδο και το είδος των ασκήσεων ήταν καλά προσαρμοσμένο για αυτή την τάξη. Το κεφάλαιο είναι μια χαρά όσον αφορά στην επανάληψη της παραγοντοποίησης, της παραγοντοποίησης περιττών αριθμών και άλλες μαθηματικές έννοιες (παράγοντας, πολλαπλασιασμός, άθροισμα και ούτω καθεξής).

Το μάθημα που ακολουθεί αυτή την ενότητα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία του τελευταίου θέματος, τον όγκο, σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών και ακολουθεί ένα μάθημα με ασκήσεις πάνω σε αυτό το θέμα. Αργότερα όμως την ίδια εβδομάδα αρχίζουμε επανάληψη και θα αναφερθώ σε αυτά που δουλέψαμε σε αυτό το κεφάλαιο, όπου ταιριάζουν, και ίσως να ζητήσω από μερικούς μαθητές να χρησιμοποιήσουν κάποιους από τους πίνακες πολλαπλασιασμού που πήραν.

Θα χρησιμοποιήσω τον πολλαπλασιασμό με τα δάχτυλα για τις εξετάσεις την 18^η και την 19^η εβδομάδα, συμπεριλαμβάνοντας την άσκηση 1. Θεωρώ ότι η μαθηματική απόδειξη πρέπει να δοθεί σε μερικούς μαθητές. Είναι πολύ προχωρημένη για τους περισσότερους μαθητές της 8^{ης} τάξης.

Η εξερεύνηση άλλων μεθόδων πολλαπλασιασμού πρέπει να γίνει μετά τις εξετάσεις (την 21^η εβδομάδα). Στη φάση αυτή, η δραστηριότητα αυτή είναι σχετική και κατάλληλη για την 4^η έως και 6^η τάξη.

Από το σχολείο Saupstad

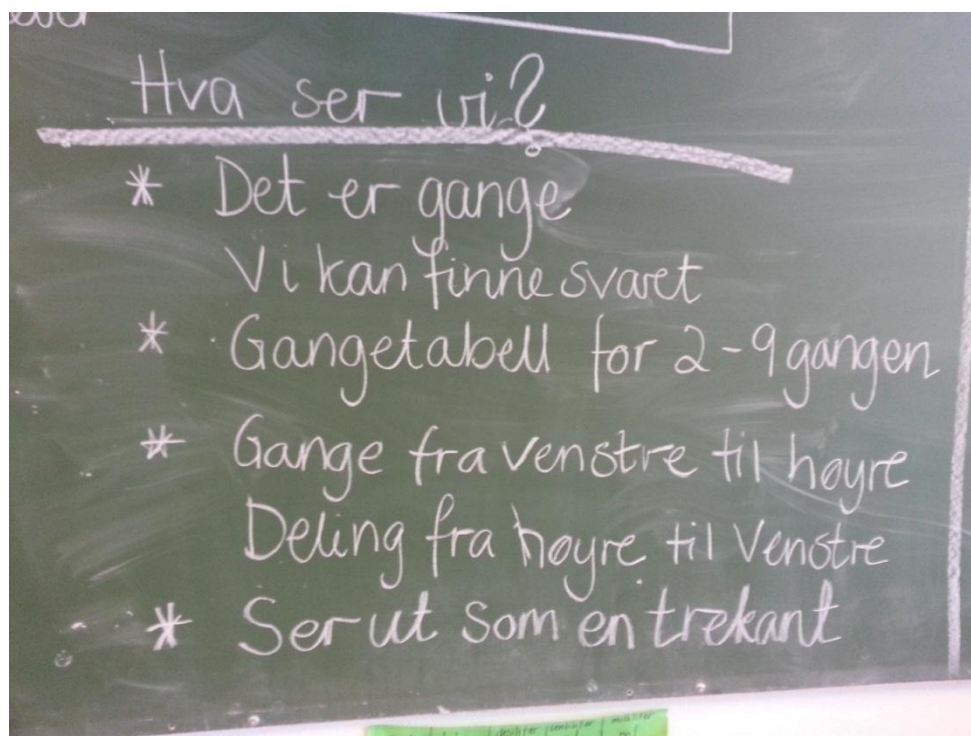
Εδώ η εκπαιδευτικός έκανε τη διδακτική ενότητα στην 5η τάξη και μας έδωσε λεπτομερείς σημειώσεις για τη δουλειά της. Ένα μάθημα (45 λεπτά)

χρησιμοποιήθηκε για την πρώτη συνεδρία. Χρησιμοποίησε την πρώτη συνεδρία αρχίζοντας να λέει την ιστορία για το παλιό βιβλίο. Μετά έδωσε ένα αντίγραφο του συνόλου των αριθμών σε κάθε μαθητή και τους έδωσε 5 λεπτά για να το μελετήσουν. Στη συνέχεια, οι μαθητές σε ομάδες των δύο μαθητών συζήτησαν και σχημάτισαν ερωτήσεις. Η καθηγήτρια κρατούσε σημειώσεις στον πίνακα.

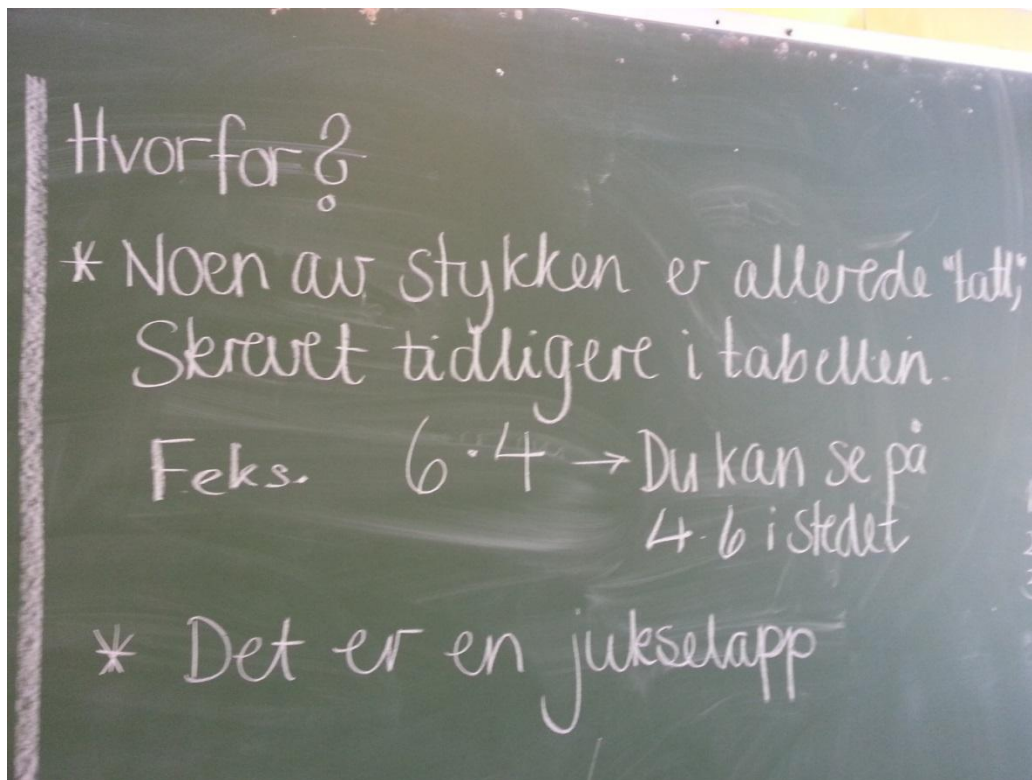
Εδώ είναι η μετάφραση των σημειώσεων της εικόνας 1:

Τι βλέπουμε;

- *Είναι χρόνοι. Μπορούμε να βρούμε την απάντηση. It is times.*
- *Χρονοδιαγράμματα από το 2-9.*
- *Χρόνοι από αριστερά προς τα δεξιά. Χωρίζονται από τα δεξιά στα αριστερά.*
- *Μοιάζει με ένα τρίγωνο.*



Εικόνα 1: Οι σημειώσεις της δασκάλας από τις απαντήσεις των μαθητών στο “Τι βλέπουμε”;

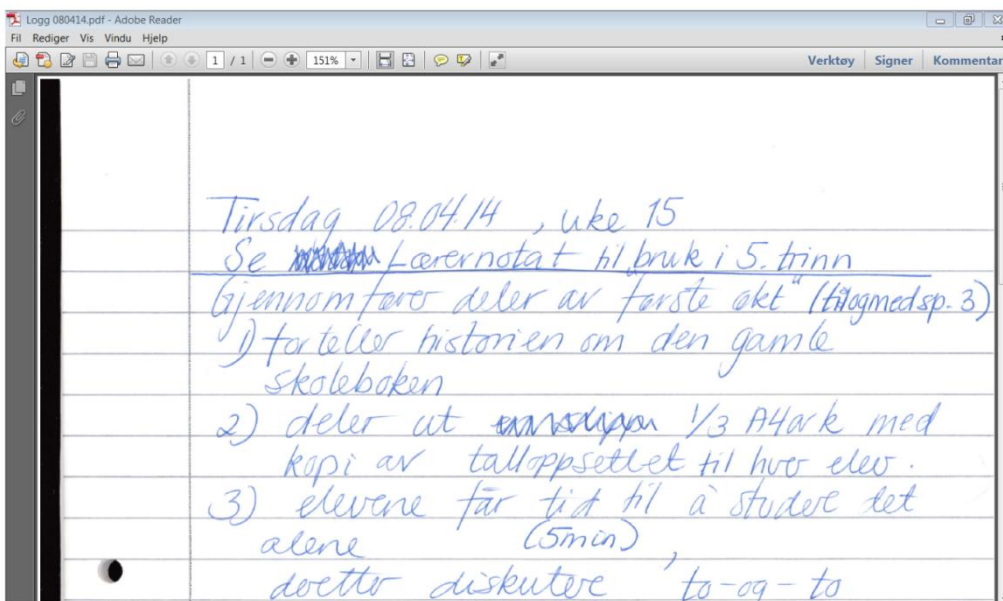


Φωτογραφία 2: Οι σημειώσεις της δασκάλας από τις απαντήσεις των μαθητών στο “Γιατί;”.

Μετάφραση του κειμένου στην εικόνα 2:

Γιατί;

- Μερικές από τις ασκήσεις έχουν ήδη γίνει. Γράφτηκαν νωρίτερα στον πίνακα. Για παράδειγμα $6 \cdot 4 \rightarrow$ Κοίτα το $4 \cdot 6$.
- Είναι παραπλανητικό το σημείωμα.



Φωτογραφία 3. Τμήμα των σημειώσεων της δασκάλας αναφορικά με το σχεδιασμό της ενότητας.

Οι μαθητές ήταν πρόθυμοι να συζητήσουν και μερικοί απ' αυτούς ήθελαν να κρατήσουν το σύνολο των αριθμών που δόθηκε στο θρανίο τους και να τον

χρησιμοποιήσουν ως εργαλείο. Μερικοί το κόλλησαν στον τετράδιό τους των μαθηματικών. Οι μαθητές μετά έκαναν την άσκηση 1 και χρησιμοποίησαν το σύνολο των αριθμών για τους υπολογισμούς.

Συμπεράσματα

Στην Νορβηγία οι εκπαιδευτικοί δίνουν προτεραιότητα στο ανταποκριθούν στο πρόγραμμα σπουδών καλύπτοντας όλα τα προτεινόμενα περιεχόμενά του. Οι εξετάσεις θεωρούνται ιδιαίτερα σημαντικές και πολύς χρόνος αφιερώνεται στην προετοιμασία των μαθητών γι' αυτές. Στο πλαίσιο αυτό οι εκπαιδευτικοί συχνά αισθάνονται ότι υπάρχει λίγη ελευθερία και δεν τολμούν να εισάγουν στη διδασκαλία τους διαφορετικές προσεγγίσεις και θέματα εκτός από αυτά που δηλώνονται άμεσα και σαφώς στο πρόγραμμα σπουδών. Από την άποψη αυτή ήταν αναμενόμενο οι δάσκαλοι που υλοποίησαν τη δραστηριότητα πιλοτικά να νιώθουν ότι δεν μπορούν να αφιερώσουν πολύ χρόνο σε μια διδακτική ενότητα που δεν βλέπουν άμεσα πώς μπορεί να υποστηρίξει μαθησιακά τους μαθητές τους. Αυτό εξηγεί γιατί η δασκάλα στο σχολείο Karuss δεν μπορούσε να διδάξει όλα τα τμήματα της ενότητας το ένα μετά το άλλο αλλά θεώρησε ότι έπρεπε να ξαναγυρίσει σε αυτή αργότερα. Στην περίπτωση του σχολείου Saupstad δυστυχώς έχουμε μόνο την αναφορά από την πρώτη συνεδρία και η υπόλοιπη λείπει. Ελπίζουμε να μπορέσουμε να έχουμε κάποιο τμήμα της αργότερα.

Και οι δυο καθηγήτριες αναφέρουν ότι οι μαθητές έδειξαν προθυμία μάθησης και ενθουσιασμό για το τριγωνικό σύνολο αριθμών ως εργαλείο στους υπολογισμούς. Οι μαθητές ήθελαν να διατηρήσουν το τριγωνικό σύνολο αριθμών ως εργαλείο για τους υπολογισμούς τους. Επισημαίνεται ότι όταν οι μαθητές βλέπουν κάτι που μπορεί να τους υποστηρίξει και να κάνει τη μάθηση πιο εύκολη το αντιμετωπίζουν ως τέχνασμα, σαν να πρέπει τα μαθηματικά οπωσδήποτε να είναι δύσκολα.

Όταν οι μαθητές έψαξαν για συμπληρωματικές μεθόδους πολλαπλασιασμού φαίνεται ότι ανακάλυψαν τα μαθηματικά από διαφορετικά μέρη του κόσμου και διαφορετικές κουλτούρες.

Από τις απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις φαίνεται ότι ακόμη και στην 8^η τάξη χρησιμοποιούν μια μάλλον ανώριμη ορολογία όπως, φορές αντί για επί και χωρίζουμε αντί διαιρούμε. Σε διδασκαλίες όπως αυτή αναδύονται ευκαιρίες να μάθουν οι μαθητές περισσότερα για την ορολογία και σε διαφορετικές γλώσσες.

Οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην πιλοτική εφαρμογή της ενότητας μολονότι δίδασκαν σε διαφορετικές ηλικιακές ομάδες, βρήκαν τρόπους να χρησιμοποιήσουν την ενότητα αποτελεσματικά. Το επίπεδο δυσκολίας που αναδύεται και η επιλογή του θέματος που πραγματεύεται η ενότητα αυτή φαίνεται να είναι κατάλληλα για την βαθμίδα του Γυμνασίου.

Δεύτερη πιλοτική εφαρμογή

από τους Andreas Ulovec** και Therese Tomiska

Γενικές πληροφορίες

Η πιλοτική εφαρμογή της διδακτικής ενότητας έγινε από μια γυναίκα μαθηματικό με πέντε χρόνια διδακτική εμπειρία στο αντικείμενο των μαθηματικών που δούλευε σε ένα Λύκειο κοντά στη Βιέννη. Η Αυστριακή ομάδα του προγράμματος έστειλε το υλικό στην εκπαιδευτικό περίπου 3 εβδομάδες πριν την σχεδιαζόμενη διδακτική εφαρμογή. Η εκπαιδευτικός είχε την 5^η (14-15 ετών), 6^η (15-16) and 8^η (17-18) τάξη διαθέσιμη για την πιλοτική εφαρμογή. Μετά από συνάντηση με την ομάδα του προγράμματος, επέλεξε να κάνει την πιλοτική εφαρμογή κατά τη διάρκεια ενός κανονικού μαθήματος μαθηματικών (50 λεπτά) στην 6^η τάξη. Οκτώ μαθητές (ηλικίας 17-18 ετών), τρεις από τους οποίους είναι μεταναστευτικής καταγωγής, παρακολούθησαν το μάθημα, το οποίο βιντεοσκοπήθηκε και έγινε με την παρουσία ενός μέλους της ομάδας του προγράμματος από την Αυστρία. Μετά την πιλοτική εφαρμογή, δόθηκε μια συνέντευξη από την εκπαιδευτικό.

Η πιλοτική εφαρμογή στην τάξη

Η εκπαιδευτικός έκανε την πρώτη *συνεδρία* όπως περιγράφεται στο Νορβηγικό υλικό, δίνοντας φυλλάδια που περιείχαν έναν πίνακα του πολλαπλασιασμού από το έτος 1601 και άρχισε μια συζήτηση στην ομάδα γι' αυτό. Η συζήτηση είχε διάρκεια περίπου 12 λεπτά.



Ομαδική συζήτηση για τον πίνακα του πολλαπλασιασμού

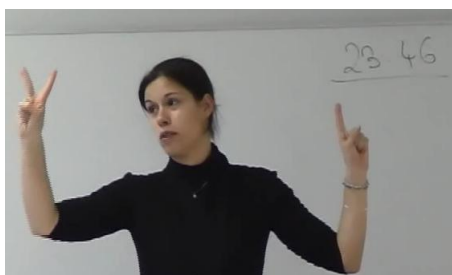
Οι μαθητές ενδιαφέρθηκαν πολύ για τους λόγους με τους οποίους συνδέεται η ανάγκη για τέτοιους πίνακες, εάν υπήρχαν τέτοιοι πίνακες στην ιστορία της δικής τους κουλτούρας και (από μαθηματική άποψη) γιατί αυτοί οι (συντομευμένοι) πίνακες ήταν επαρκείς και περιέχουν τα ίδια βασικά στοιχεία όπως οι παραδοσιακοί, ολοκληρωμένοι τετραγωνικοί πίνακες που ξέρουν. Κάποιες από τις πληροφορίες για τις διάφορες όψεις του θέματος δόθηκαν από την εκπαιδευτικό, κάποιες από τους μαθητές, οι οποίοι χρησιμοποίησαν πηγές στο διαδίκτυο για να βρουν επιπρόσθετες πληροφορίες.

**Faculty of Mathematics - University of Vienna, Austria.



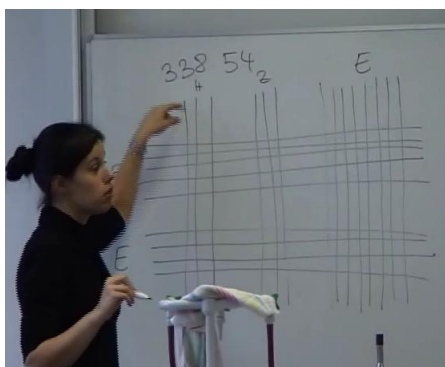
Η εκπαιδευτικός ακούει τα επιχειρήματα των μαθητών

Η συνεδρία 2 άρχισε με την εισαγωγή από την εκπαιδευτικό της μεθόδου πολλαπλασιασμού με τα δάχτυλα.



Η εκπαιδευτικός δείχνει και οι μαθητές δοκιμάζουν τον πολλαπλασιασμό με τα δάχτυλα

Μετά ζητήθηκε από τους μαθητές να δοκιμάσουν τη μέθοδο και – μαζί με την εκπαιδευτικό – να βρουν μια εξήγηση γιατί η μέθοδος αυτή λειτουργεί (15 λεπτά). Οι μαθητές σκέφτηκαν διάφορες εξηγήσεις και ήθελαν να βρουν αν η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί σε μεγαλύτερους αριθμούς.



Η εκπαιδευτικός καθώς υποστηρίζει τις προσπάθειες γενίκευσης των συμπερασμάτων των μαθητών

Επίσης ενδιαφέρθηκαν να μάθουν αν αυτός ή άλλοι “ασυνήθιστοι” πολλαπλασιασμοί χρησιμοποιήθηκαν ιστορικά. Δυο από τους μαθητές μεταναστευτικής καταγωγής (από την Τουρκία) ανέφεραν μια μέθοδο βασισμένη στη γεωμετρία από τη δική τους κουλτούρα, την οποία η εκπαιδευτικός εξήγησε περαιτέρω.

Όπως φαίνεται, οι τέσσερις συνεδρίες που προβλέφθηκαν στο υλικό για τον Πολλαπλασιασμό με τα Δάχτυλα ενσωματώθηκαν από την εκπαιδευτικό σε ένα μάθημα. Από τη στιγμή που δεν υπήρχε χρονοδιάγραμμα αναφορικά με το υλικό, και επειδή οι μαθητές ήδη ήξεραν για τον πολλαπλασιασμό, τα αριθμητικά συστήματα και διάφορες αλγεβρικές μεθόδους, δεν κρίθηκε αναγκαία μια μεγαλύτερη διάρκεια για την ενότητα.

Συνέντευξη με την εκπαιδευτικό

Διεξήχθη μια συνέντευξη με την εκπαιδευτικό το απόγευμα μετά την πιλοτική εφαρμογή. Η εκπαιδευτικός ανέφερε ότι κατά τη διάρκεια του διαλείμματος αμέσως μετά το μάθημα, οι μαθητές ρωτήθηκαν από την εκπαιδευτικό για την εμπειρία τους ως την ενότητα. Και αυτοί που δεν είχαν μεταναστευτική καταγωγή και αυτοί που είχαν απάντησαν πολύ θετικά. Ειδικότερα, οι μετανάστες μαθητές ανέφεραν την ευκαιρία που τους δόθηκε να δώσουν πληροφορίες για τη δική τους κουλτούρα την οποία οι υπόλοιποι μαθητές δεν γνώριζαν. Οι μαθητές που δεν είχαν μεταναστευτική καταγωγή έκαναν θετικά σχόλια για τις διάφορες ιστορικές και πολιτισμικές αναφορές οι οποίες συνήθως δεν υπάρχουν στα συνηθισμένα μαθήματα μαθηματικών. Η εκπαιδευτικός χάρηκε ιδιαίτερα με την προοπτική να έχει διάφορες αφορμές για πολιτισμικές αναφορές και εκτίμησε τη δυνατότητα των μεταναστών μαθητών όχι μόνο να συμμετέχουν αλλά να λειτουργήσουν και ως πηγή πληροφόρησης για τους άλλους μαθητές.

Συμπεράσματα

Η πιλοτική εφαρμογή έδειξε ξεκάθαρα ότι οι μαθητές ενδιαφέρονται για το μαθηματικό περιεχόμενο άλλων πολιτισμών και ότι η ενεργός συμμετοχή των μεταναστών μαθητών και η εισαγωγή των πολιτισμών τους μπορεί να εμπλουτίσει την μαθησιακή διαδικασία.

Τρίτη πιλοτική

από Hana Moraoná*** και JarmilaNovotná***

Τόπος: ZŠ Fr. Plamínkové s RVJ, Πράγα

Χρόνος: 9 Σεπτεμβρίου 2014

Τάξη: 3^η τάξη (2 διαφορετικές τάξεις)

Επίπεδο γνώσεων: γνώση της προπαίδειας μέχρι το 5, μια από τις τάξεις ήδη άρχισε τον πολλαπλασιασμό 6-9 πριν τις διακοπές, μερικά παιδιά τα θυμόταν.

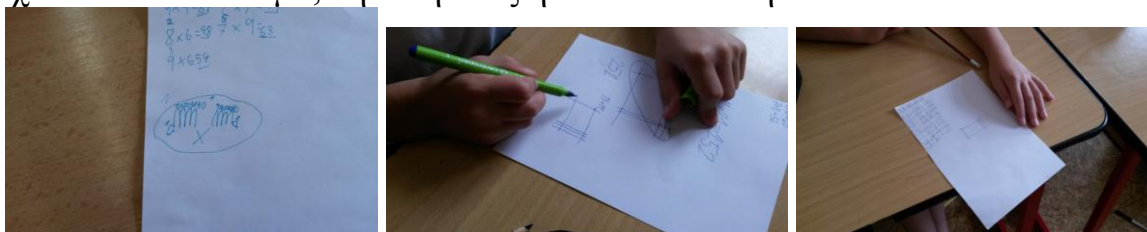
Τα μαθήματα έγιναν στα αγγλικά, στο πλαίσιο συνδυασμένης διδασκαλίας περιεχομένου γνωστικού αντικείμενου και γλώσσας (CLIL) και ετοιμάστηκαν βίντεο για να παρουσιαστεί ο τρόπος που χρησιμοποιείται ο πολλαπλασιασμός με τα δάχτυλα, αλλά δεν δούλεψε ο προβολέας

Η πορεία και των δυο μαθημάτων

- Επανάληψη των αριθμών από το ένα μέχρι το εκατό

*** Faculty of Education - Charles University in Prague, Czech Republic.

- Επανάληψη του πολλαπλασιασμού 1-5
- Επίδειξη του πολλαπλασιασμού με τα δάχτυλα (από τον εκπαιδευτικό) με δυο παραδείγματα. Χρησιμοποιώντας τα δάχτυλα και τον πίνακα.
- Ζητείται από τα παιδιά να το κάνουν, πολύ λίγα το είχαν καταλάβει, οπότε δυο άλλα προβλήματα λύθηκαν μπροστά στον πίνακα. Ζητήθηκε από ένα μαθητή να έρθει, το έκανε με τη συνεργασία του εκπαιδευτικού, του μαθητή και της υπόλοιπης τάξης που έλεγε τους αριθμούς.
- Στη συνέχεια τους ζήτησε και δουλέψουν μόνοι τους και ο εκπαιδευτικός συντόνιζε την προσπάθειά τους, βοηθώντας ατομικά αυτούς που το χρειαζόταν.
- Μετά ο εκπαιδευτικός δείχνει ένα άλλο μαγικό κόλπο, πολλαπλασιασμό με διψήφιους αριθμούς, χρησιμοποιώντας γραμμές. Η τακτική αυτή άρεσε στα παιδιά πάρα πολύ και το κατάλαβαν πιο εύκολα, είχε λιγότερο μέτρημα, δεν είχε πολλαπλασιασμό, δηλαδή τους ήταν πιο εύκολη διαδικασία.



Μάθημα 2: Νοέμβριος 2014

Ένα τμήμα της τρίτης τάξης, μάθημα Συνδυασμένης Εκμάθησης Γνωστικού αντικειμένου και Γλώσσας [Content and Language Intergrated learning (CLIL)]

Προετοιμασία – χρησιμοποιώντας τις αριθμογραμμές, οι μαθητές κάθε φορά που αναγνωρίζουν αριθμό διαιρετό με το 3 και μετά το 4, το δηλώνουν με ήχο.

Καθοδήγηση – επανάληψη του πολλαπλασιασμού με τα δάχτυλα (οι μαθητές τώρα έχουν μάθει την προπαίδεια, η διαδικασία υιοθετείται για να δοθούν κίνητρα και να είναι διασκεδαστικό)

Βασική δραστηριότητα: Θα σου δείξω πως να κάνεις ένα κόλπο- πολλαπλασιασμός με διψήφιους αριθμούς, το είχαν κάνει οι μαθητές στο προηγούμενο μάθημα CLIL

Υλικό – μιλιμετρέ χαρτί (για να είναι πιο εύκολο να σχεδιαστούν οι γραμμές και να γίνει εξάσκηση με μονάδες, δεκάδες και εκατοντάδες που είναι μεγαλύτερες του δέκα)

Στην πρώτη σειρά πολλαπλασιασμού που ήλεγξε ο εκπαιδευτικός, αυτός σχεδιάζει το μοντέλο, τα παιδιά μετράνε όλα μαζί τον αριθμό των σημείων που τέμνονται, τους αριθμούς που δεν υπερβαίνουν το δέκα (σε μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες)

Μετά γίνονται παρόμοιοι πολλαπλασιασμοί ατομικά (η ίδια σειρά αριθμών για όλους).

Έπειτα με διψήφιους αριθμούς, όπου τα παιδιά πρέπει να προσθέσουν μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες πάνω από 10, το πρώτο παράδειγμα το κάνουν μαζί στον πίνακα.

Μετά οι μαθητές δουλεύουν μαζί σε άλλο ζευγάρι αριθμών μόνοι τους, ο εκπαιδευτικός εποπτεύει και ελέγχει την κατανόηση, δουλεύει με πιθανά λάθη (τα παιδιά ζωγραφίζουν τις γραμμές πάρα πολύ κοντά και δεν μπορούν να δουν το όριο μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου ψηφίου, τα παιδιά ξεχνάνε να προσθέσουν μονάδες κλπ. μεγαλύτερες του δέκα).

Ελέγχεται το αποτέλεσμα και διορθώνονται πιθανά λάθη.

Μάθημα 3: 13 Φεβρουαρίου 2015

Σύντομη βιντεοσκόπηση

Προετοιμασία – ένα τραγούδι με αριθμούς (μόνο δημιουργία κινήτρων και για ζέσταμα), αριθμογραμμές όπως στο προηγούμενο μάθημα

Καθοδήγηση: επανάληψη του πολλαπλασιασμού των μονοψήφιων αριθμών· μάθηση της λέξης “διαιρετός”· τα παιδιά παίρνουν μια κάρτα με έναν αριθμό και λένε “Είμαι ένας αριθμός διαιρετός με το ... και με το ... Ποιος αριθμός είμαι;”. Οποιος απαντήσει σωστά γίνεται ο επόμενος που “είναι” ένας αριθμός.

Επανάληψη του πολλαπλασιασμού με τα δάχτυλα.

Βασική δραστηριότητα:

1. ένας πολλαπλασιασμός δυο διψήφιων αριθμών σε ένα φύλλο χαρτί, ο εκπαιδευτικός παρακολουθεί και βοηθάει όπου χρειάζεται
2. παίρνονται τα αποτελέσματα και περιγράφονται ως μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες
3. γράφεται στον πίνακα ένας μεγαλύτερος αριθμός και σημειώνονται οι δεκάδες χιλιάδες, χιλιάδες, εκατοντάδες, δεκάδες, μονάδες (αρχίζοντας από μονάδες από τη δεξιά μεριά)
4. ο εκπαιδευτικός δίνει οδηγίες στα παιδιά: *Πάρτε 5 μολύβια με διαφορετικά χρώματα από την κασετίνα σας. Ο εκπαιδευτικός παίρνει 5 διαφορετικές κιμωλίες. Υπογραμμίστε τις δεκάδες με ένα χρώμα, π.χ. μπλε. Ο εκπαιδευτικός το κάνει στον πίνακα. Πάρτε ένα άλλο χρώμα. Υπογραμμίστε τις εκατοντάδες. Ο εκπαιδευτικός υπογραμμίζει τις εκατοντάδες στον πίνακα... Μέχρι να φτάσουν στις δεκάδες και χιλιάδες*
5. Ο εκπαιδευτικός δίνει οδηγίες: *Τώρα ας πολλαπλασιάσουμε τριψήφιους αριθμούς. Και το δείχνει στον πίνακα, αργά, βήμα προς βήμα, χρησιμοποιώντας διαφορετικά χρώματα για να δείξει μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες και επίσης για να κάνει τους μαθητές να προσέξουν τη δυσκολία που αναδύεται όταν έχουν περισσότερες από δέκα μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες κλπ. και πως να την αντιμετωπίσουν.*
6. Η εκπαιδευτικός εκμαιεύει άλλους δυο τριψήφιους αριθμούς και ζητάει από τους μαθητές να δουλέψουν μόνοι τους, παρακολουθώντας προσεκτικά την

πρόοδό τους, βοηθώντας ατομικά: οι μαθητές καταλαβαίνουν γρήγορα, μερικοί λύνουν τον πολλαπλασιασμό πολύ γρήγορα, κι έτσι παρουσιάζεται ένα καινούριο ζευγάρι από τριψήφιους αριθμούς. Η προσεκτική παρακολούθηση βοηθάει την πλειοψηφία των μαθητών να καταλάβει το σύστημα

7. Κατά τον έλεγχο των αριθμών σε όλη την τάξη, υπήρχε το εμπόδιο της γλώσσας -μερικά παιδιά μπορούν να πουν τους αριθμούς μόνο μέχρι το εκατό στα αγγλικά, ο εκπαιδευτικός γράφει τους αριθμούς που θα λειτουργήσουν ως μοντέλο στον πίνακα, η τάξη εξασκείται



ζέσταμα (επανάληψη του πολλαπλασιασμού με τα δάχτυλα)

Άλλη πιλοτική εφαρμογή: 24 Φεβρουαρίου 2014

4^η τάξη, εικόνες, χρήση διαδραστικού πίνακα, το ίδιο σχολείο

Ο εκπαιδευτικός αποφάσισε να δοκιμάσει την ίδια διδακτική ενότητα με μαθητές που είναι ένα χρόνο μεγαλύτεροι (διαθέτουν λίγο καλύτερο επίπεδο αγγλικών και μεγαλύτερη εμπειρία στην πρόσθεση μεγαλύτερων αριθμών). Η τάξη ήδη ήξερε την προπαίδεια και έτσι το μάθημα δεν βασίστηκε στο πολλαπλασιασμό με τα δάχτυλα, αλλά στον πολλαπλασιασμό με την υποστήριξη των γραμμών, και με διψήφιους και με τριψήφιους αριθμούς και στη χρήση ΤΠΕ

Στόχος του μαθήματος: εξάσκηση καταγραφής αριθμών ως μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες χιλιάδες, πολλαπλασιασμός και πρόσθεση, παροχή κινήτρων, διδασκαλία των μαθηματικών στα αγγλικά (δεύτερη γλώσσα των μαθητών)

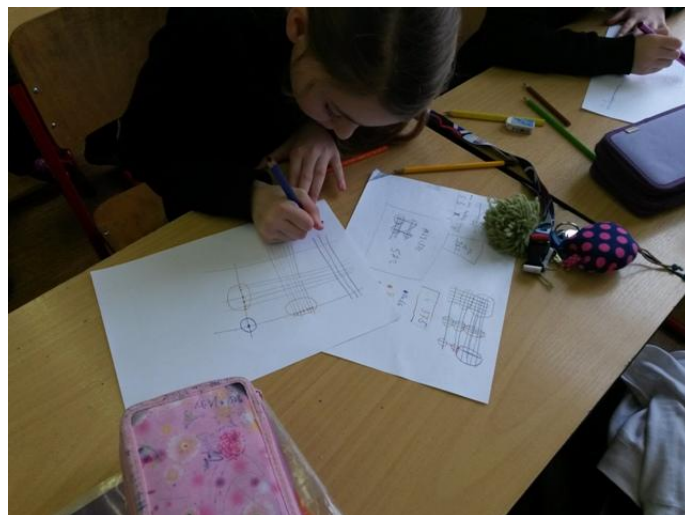
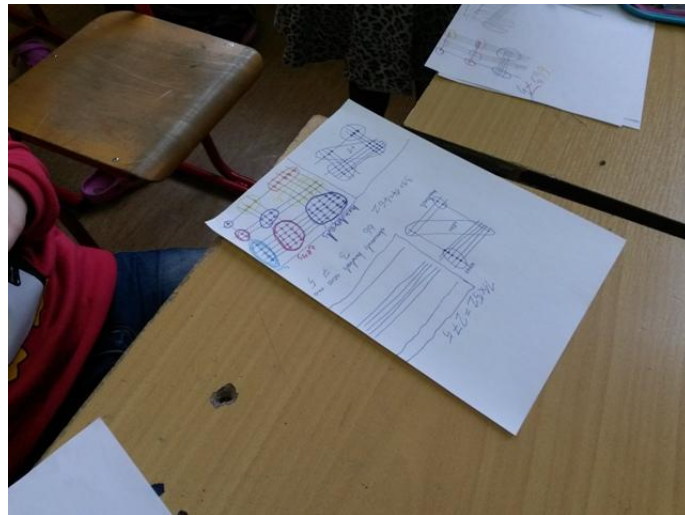
Προετοιμασία – παροχή κινήτρων και ζέσταμα, επίδειξη του πολλαπλασιασμού με τα δάχτυλα, δοκιμή με μερικούς αριθμούς

Βασική δραστηριότητα – μάθηση καινούριων τρόπων πολλαπλασιασμού μεγάλων αριθμών

1. Εισαγωγή σε βασική ορολογία -μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες..., προσθέτω, αφαιρώ κλπ.
2. επιλογή 2 διψήφιων αριθμών, δείχνοντας την αρχή του πολλαπλασιασμού με την υποστήριξη των γραμμών στο διαδραστικό πίνακα
3. Επιλογή άλλων 2 διψήφιων αριθμών, ατομική δουλειά, ο εκπαιδευτικός εποπτεύει προσεκτικά. Περίπου οι μισοί από τους μαθητές ανακάλυψαν τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να δουλεύουν όταν υπάρχουν περισσότερες από 10

μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες και βρήκαν τη σωστή λύση. Οι υπόλοιποι μαθητές βοηθήθηκαν ατομικά από τον εκπαιδευτικό και έδειξαν τη διαδικασία στον πίνακα: ο μαθητής που τελείωσε νωρίτερα σχεδίαζε τις γραμμές και τα υπόλοιπα τα έκαναν μαζί, δίνοντας προσοχή στο τι να κάνουν με τις μονάδες, τις δεκάδες ... αν υπήρχαν περισσότερες από 10

4. Μετάβαση σε τριψήφιους αριθμούς. Χρησιμοποιούν πάλι 5 διαφορετικά χρώματα για τις μονάδες, δεκάδες... Το πρώτο παράδειγμα γίνεται στο διαδραστικό πίνακα χρησιμοποιώντας διαφορετικά χρώματα
5. Μετά την επιλογή άλλων δυο τριψήφιων αριθμών, οι μαθητές δουλεύουν μόνοι τους και ο εκπαιδευτικός εποπτεύει και βοηθάει ατομικά. Ελέγχει ώστε οι μαθητές να μην μπερδέψουν τις μονάδες, τις δεκάδες, τις εκατοντάδες. Περίπου οι μισοί από τους μαθητές το βρίσκουν πολύ εύκολο, οι υπόλοιποι χρειάζονται βοήθεια και υποστήριξη.





Συμπεράσματα από τις τρεις πιλοτικές εμπειρίες

by Barbro Grevholm

Και οι τρεις αναφορές για την πιλοτική εφαρμογή δείχνουν ότι αυτή η διδακτική ενότητα δούλεψε καλά και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διαφορετικές ηλικιακές ομάδες από τάξεις 3^η μέχρι τη 8^η τάξη της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Όπως αναφέρθηκε, οι μαθητές δούλεψαν πρόθυμα, με ενδιαφέρον και ενθουσιασμό. Οι εκπαιδευτικοί εμπνεύστηκαν να υλοποιήσουν τις προτεινόμενες αλλά και παρόμοιες δραστηριότητες που βρήκαν σχετικά με τον πολλαπλασιασμό. Οι εκπαιδευτικοί επίσης χρησιμοποίησαν την ενότητα για να δουλέψουν πάνω στη γλώσσα και την ορολογία και βρήκαν συνδέσμους ανάμεσα στον πολλαπλασιασμό και σε άλλες θεματικές των μαθηματικών. Παράλληλα, χρησιμοποιήθηκαν και ιστορικές όψεις και σε μερικές περιπτώσεις οι μαθητές συνεισέφεραν με εμπειρίες από τις δικές τους κουλτούρες. Η διδακτική ενότητα φάνηκε ότι προσέφερε κάτι καινούριο και ανεξερεύνητο σε σύγκριση με παλιότερες διδασκαλίες. Πολλοί μαθητές ήθελαν να συμπεριλάβουν το τριγωνικό σύνολο αριθμών ως εργαλείο στα μαθηματικά τους.

Ένα κρίσιμο ερώτημα που προέκυψε είναι πόσος χρόνος πρέπει να χρησιμοποιηθεί για μια ενότητα σαν αυτή. Η απάντηση εξαρτάται πάρα πολύ από την ηλικιακή ομάδα των μαθητών και το πλαίσιο το οποίο θέλει να υπηρετήσει η ενότητα, δηλαδή την επανάληψη, την εμπέδωση ή την ανακάλυψη.

Ένα άλλο ερώτημα αφορά στην κατάλληλη ηλικιακή ομάδα που απευθύνεται μια διδακτική ενότητα όπως ο Πολλαπλασιασμός με δάχτυλα. Προφανώς εξαρτάται από το επίπεδο δυσκολίας των ερωτήσεων που υποβάλλει ο εκπαιδευτικός. Είναι προφανώς δυνατόν να χρησιμοποιηθεί από την 3^η μέχρι και την 8^η τάξη. Μερικοί εκπαιδευτικοί το χρησιμοποίησαν ακόμη και στην Άλγεβρα στο Λύκειο.

Η διδακτική ενότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ενθαρρύνει τους μαθητές να συνεισφέρουν με τις εμπειρίες τους και με τη δημιουργία δραστηριοτήτων. Όσον αφορά τον πολλαπλασιασμό, γενικά είναι πιο δύσκολο να δημιουργήσεις τα δικά σου προβλήματα σε σύγκριση με άλλες μαθηματικές λειτουργίες, όπως είναι η πρόσθεση και η αφαίρεση. Η κατασκευή προβλημάτων μπορεί να φωτίσει τα διαφορετικά είδη δραστηριοτήτων που χρησιμοποιούμε συνήθως στο σχολείο (Verschaffel & De Corte, 1996).

Βιβλιογραφία

- Grevholm, B. (1988). *Utmaningen. Problem och tankenötter i matematik*. [The challenge. Problems and mindnuts in Mathematics]. Malmö: Liber.
- Verschaffel, L. & De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. In *International handbook of mathematics education*, (pp. 99-137). Dordrecht: Kluwer academic Publishers.

Παραρτήματα

Παράρτημα 1 Μετάφραση της δραστηριότητας Fingerfärdig multiplikation (Grevholm, 1988)

Handy multiplication

WITH THE
NUMBERS
BETWEEN
5 AND 10

EXAMPLE 6×7 .

LIFT UP ONE FINGER AT THE LEFT HAND, THIS SYMBOLISES $5+1=6$. LIFT UP TWO FINGERS AT THE RIGHT HAND FOR SYMBOLISING $5+2=7$.

MULTIPLY THE SUM OF THE FINGERS UP BY 10.
 $3 \times 10 = 30$.

THEN, MULTIPLY THE NUMBER OF THE FINGERS DOWN AT THE LEFT HAND (4) BY THE FINGERS DOWN AT THE RIGHT HAND (3).
 $4 \times 3 = 12$.



ADD THESE NUMBERS: $30+12=42$.
THUS, THIS IS $6 \times 7 = 42$.

WHY IS THIS RIGHT?
TRY AGAIN WITH THE OTHER NUMBERS.

Παράρτημα 2

Για το βιβλίο του Rizanesanders από το 1601 (πηγή Shareza Hatami, 2014)

Το βιβλίο του Rizanesanders λεγόταν Recknekonsten, Η τέχνη του υπολογισμού The art of calculation

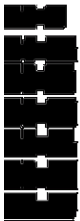
Περίπου 421 χρόνια πριν (το 1601) ο Hans Larsson Rizanesander έγραψε το πρώτο Σουηδικό σχολικό εγχειρίδιο για την Αριθμητική. Ένα μόνο αντίγραφο αυτού του χειρόγραφου βιβλίου υπάρχει στην Uppsala universitetsbibliotek (πανεπιστημιακή βιβλιοθήκη της Uppsala).

Μια ενδιαφέρουσα ερώτηση είναι πόσο χώρο πρέπει να καταλαμβάνει στη διδασκαλία ο πίνακας του πολλαπλασιασμού.

Ο πίνακας πολλαπλασιασμού του Rizanesanders βασίζεται στην αντιμεταθετική ιδιότητα· ο πίνακας δείχνει πάρα πολύ απλά τη χρήση και της μαθηματικής και της διδακτικής γνώσης.

Ο πίνακας πολλαπλασιασμού του Rizanesanders σε μια πιο απλή εκδοχή

Παρακάτω δείχνουμε τον πίνακα του Rizanesanders με έναν τρόπο που ίσως είναι πιο προσαρμοσμένος στη σύγχρονη διδασκαλία. Φαίνεται καθαρά ότι ο χειρότερος πίνακας είναι ο πιο απλός!

Tvåans tabell Table 2	Treans tabell Table 3	Fyrans tabell Table 4	Femmans tabell Table 5	Sexans tabell Table 6	Sjuans tabell Table 7	Åttans Tabell Table 8	Nians tabell Table 9
							

Στον πίνακα του Rizanesanders οι πίνακες του ένα και του δέκα δεν χρησιμοποιούνται. Μπορεί κανείς να υποθέσει ότι έπρεπε ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές να σκεφτούν μαζί πάνω σ' αυτό. Απλά χρησιμοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού για να αφαιρέσει όλους τους πολλαπλασιασμούς που υπάρχουν περισσότερο από μια φορά στον πίνακα του 10 επί 10.

Ένας πίνακας πολλαπλασιασμού, παρόμοιος με αυτόν του Rizanesanders, μπορεί να βρεθεί στα πρώτα τυπωμένα σχολικά εγχειρίδια στη Σουηδία για την Αριθμητική, αυτό του Aurelius από το 1614. Ένας άλλος παρόμοιος πίνακας πολλαπλασιασμού υπάρχει στο σχολικό εγχειρίδιο του Nils Buddaeus' (1595-1653). Ο δικός του πίνακας μας θυμίζει τον πίνακα του Rizanesanders.

1									
2	4								
3	6	9							
4	8	12	16						
5	10	15	20	25					
6	12	18	24	30	36				
7	14	21	28	35	42	49			
8	16	24	32	40	48	56	64		
9	18	27	36	45	54	63	72	81	

Παρακάτω, σημειωμένο με κόκκινο, είναι ο πίνακας του 2 και τα ακόλουθα χρώματα δείχνουν τους πίνακες για το 3, 4, 5, 6 7, 8 και τελικά το 9.

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 1 \quad 4 \\
 3 \quad 6 \quad 9 \\
 4 \quad 8 \quad 12 \quad 16 \\
 5 \quad 10 \quad 15 \quad 20 \quad 25 \\
 6 \quad 12 \quad 18 \quad 24 \quad 30 \quad 36 \\
 7 \quad 14 \quad 21 \quad 28 \quad 35 \quad 42 \quad 49 \\
 8 \quad 16 \quad 24 \quad 32 \quad 40 \quad 48 \quad 56 \quad 64 \\
 9 \quad 18 \quad 27 \quad 36 \quad 45 \quad 54 \quad 63 \quad 72 \quad 81
 \end{array}$$

Είναι ενδιαφέρον να αναρωτηθούμε από που πήραν οι Σουηδοί συγγραφείς σχολικών εγχειριδίων την ιδέα να παρουσιάσουν τον πίνακα σε τριγωνική μορφή. Μπορεί κάποιος να υποθέσει ότι προήλθε από τη Γερμανία καθώς πολλοί επιστήμονες της εποχής σπούδαζαν σε Γερμανικά πανεπιστήμια. Και από που ήρθε στη Γερμανία; Δεν το ξέρουμε προς το παρόν αλλά θα ήταν ενδιαφέρον να ψάξουμε για περισσότερες πληροφορίες.

Παράρτημα 3

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε δυο αριθμούς α και β , και που και οι δυο είναι ανάμεσα στο 5 και το 10.

Ακολουθώντας τις οδηγίες, ο αριθμός των δαχτύλων που κρατάμε πάνω είναι $(\alpha - 5) + (\beta - 5) = \alpha + \beta - 10$

Πολλαπλασιάζουμε αυτόν τον αριθμό με το 10 για να πάρουμε $10(\alpha + \beta - 10)$

Ο αριθμός των δαχτύλων που κρατάμε κάτω είναι $(10 - \alpha)$ and $(10 - \beta)$ και πολλαπλασιάζουμε αυτούς τους αριθμούς για να πάρουμε $(10 - \alpha) \cdot (10 - \beta) = 100 - 10(\alpha + \beta) + \alpha \cdot \beta$

Το άθροισμα αυτών των δυο αριθμών είναι $10(\alpha + \beta - 10) + 100 - 10(\alpha + \beta) + \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$, το οποίο είναι το γινόμενο που θέλαμε να υπολογίσουμε.

Έτσι έχουμε αποδείξει ότι για οποιοδήποτε αριθμό α και β ανάμεσα στο 5 και το 10 οι οδηγίες δίνουν το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$

Παράρτημα 4

Μερικοί χρήσιμοι σύνδεσμοι για τον πολλαπλασιασμό με τα δάχτυλα:

http://ncm.gu.se/media/namnaren/npn/arkiv_xtra/09_2/mattfolk.pdf

<http://gwydir.demon.co.uk/jo/numbers/finger/multiply.htm>

http://scimath.unl.edu/MIM/files/MATExamFiles/WestLynn_Final_070411_LA.pdf

<http://threesixty360.wordpress.com/2007/12/31/three-finger-tricks-for-multiplying/>

http://www.dccc.edu/sites/default/files/faculty/sid_kolpas/mathteacherfingers.pdf