

# MOLTIPLICAZIONE CON LE DITA

di Barbro Grevholm\*

## INTRODUZIONE

L'ambito di studio dell'unità didattica è la moltiplicazione con approcci diversi (storia, cultura, tradizioni, uso di strumenti e libri), l'uso di strumenti concreti nei calcoli, l'uso della early algebra per la formulazione di regole per la moltiplicazione e per provare risultati matematici, modi diversi di provare in matematica e ragionamento matematico.

### La sperimentazione con gli insegnanti

Gli argomenti di matematica che si prevede di sviluppare sono l'aritmetica di moltiplicazione, operazioni e regole, fattori, prodotti e fattorizzazioni, prova e provare, storia della matematica, riflessioni metacognitive sull'apprendimento della matematica e sulla comprensione della matematica in relazione all'apprendimento orale.

### Obiettivi dell'unità didattica

Gli obiettivi dell'unità didattica sono di far riflettere gli alunni sul processo moltiplicativo, rendersi conto delle proprietà della moltiplicazione e trovare collegamenti fra la moltiplicazione ed altre aree della matematica. Gli alunni possono anche riflettere su ciò che devono sapere a memoria e ciò che può essere riprodotto con strumenti e risorse diversi. Gli alunni possono anche notare che la matematica è fatta e utilizzata da gente comune in molte parti del mondo. Da interviste con componenti della propria famiglia, gli alunni di cultura minoritaria possono apprendere come la moltiplicazione è trattata nei loro Paesi.

---

\*Facoltà di Ingegneria e Scienze, Dipartimento di Scienze Matematiche, Università di Agder, Norvegia.

## Sperimentazione principale

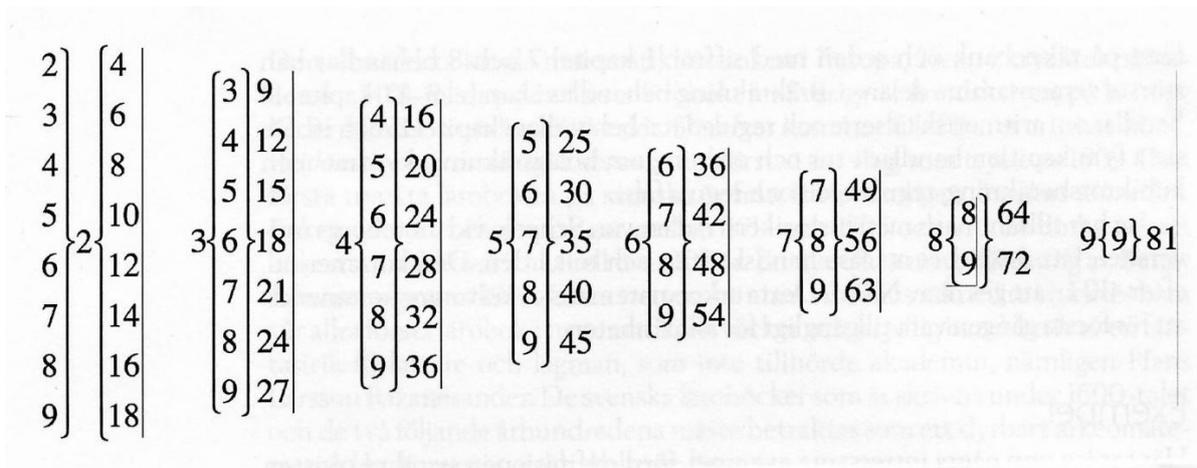
di Barbro Grevholm

La proposta: *Testo originale dell'unità didattica "Moltiplicazione con le dita"*

Inizio dell'unità:

*Sessione 1*

Agli alunni viene data un'immagine (vedere qui sotto) di un insieme di numeri disposti in forma triangolare, tratta da un libro scritto a mano del 1601 (13 anni prima che il primo libro di matematica venisse stampato in Svezia). La storia del libro può essere raccontata, vedi Allegato 2.



L'insegnante dà inizio a una discussione di gruppo con le seguenti domande (dopo che gli alunni hanno avuto tempo di esaminare la disposizione dei numeri):

1. Che cosa vedi in questa disposizione dei numeri? Hai visto qualcosa di simile prima?
2. Quale potrebbe essere la ragione per presentare questa disposizione di numeri in questo modo? Come hai incontrato una tale disposizione nel tuo apprendimento della matematica?
3. Qual è la proprietà dei numeri che rende possibile la tabella nel vecchio libro? Quale può essere la ragione per il non usare anche oggi tali disposizioni più brevi?

*Commenti per l'insegnante:* Ci si può aspettare che gli alunni riconoscano la linea dei risultati nella tabellina del 2 e in quella del 3. Forse fanno un collegamento alla normale tabellina della moltiplicazione? Qui è possibile che l'insegnante chieda alla classe di scrivere la normale tabellina della moltiplicazione con 10 per 10 uguaglianze e, in questa tabellina, colorare i prodotti che sono presenti nel modello triangolare. Dopo ulteriore studio e discussione, la classe può scoprire che i prodotti che risultano mancanti nel modello triangolare sono già presenti nelle tabelline. Così, tutte le copie dei calcoli risultano tolte nel modello triangolare.

Ora l'insegnante può spiegare agli alunni che queste tabelline possono essere utilizzate in due modi: per calcolare un prodotto di due numeri naturali o per trovare da un numero, visto come prodotto, quali sono i suoi fattori. Cioè, uno può calcolare  $3 \cdot 4$  o può domandarsi quali sono i fattori di un dato numero come 12. A questo punto l'insegnante potrebbe volere fare ripassare la terminologia "fattore" e "prodotto" usata nella moltiplicazione e rendere gli alunni consapevoli della differenza rispetto all'addizione dove si parla di "termini" e "somma".

### Esercizi

1. Usare una delle tabelline per calcolare: a)  $2 \cdot 9$  e  $9 \cdot 2$  - b)  $8 \cdot 7$  e  $7 \cdot 8$  - c)  $5 \cdot 8$  e  $8 \cdot 5$ . Che cosa noti? Qual è il nome di questa proprietà della moltiplicazione fra numeri? Puoi trovare un modo semplice per illustrare questa legge? Cosa puoi dire di un rettangolo di 2 righe e 9 colonne? Cosa succede se lo guardi da angoli diversi?
2. Trova i possibili fattori dei numeri 18, 27, 42 usando una delle tabelline. Vi sono più di una opzione?
3. In quanti modi puoi scomporre 48 in fattori interi? C'è un modo più semplice di tutti per scrivere un intero come prodotto di fattori semplici? Ritieni che  $2 \cdot 24$  e  $24 \cdot 2$  siano due modi diversi? Oppure: vedi  $2 \cdot 3 \cdot 8$  e  $8 \cdot 3 \cdot 2$  come due modi diversi? Perché i due ultimi prodotti sono uguali? Che nome dai alle regole che ci danno conferma di questo?
4. Puoi pensare a una situazione dove sia importante essere capaci di trovare i fattori di un numero intero?
5. Per quale numero devi moltiplicare a) 12 per ottenere 36? b) 9 per avere 72? c) 15 per ottenere 90?
6. Il numero 4 può essere fattorizzato come  $2 \cdot 2$  e  $2+2$  fa 4, così la somma dei fattori è uguale al numero. Riesci a trovare un altro numero con questa proprietà?
7. Ora puoi creare alcuni problemi simili e chiedere ai tuoi amici di classe di risolverli.

### *Sessione 2*

L'insegnante presenta l'attività con una conversazione che si sviluppa lungo queste linee: i matematici spesso si definiscono persone pigre e preferiscono fare le cose nella maniera più semplice possibile e lavorare il meno possibile. Una delle cose su cui gli alunni lottano a scuola per molti anni è imparare le tabelline. Come può essere ridotto questo lavoro? Qual è la cosa che hai trovato più difficile nelle tabelline? Una mia amica ha trovato molto facile calcolare  $7 \cdot 7$  perché è stato nell'anno 1949 che lei imparò la tabellina del 7. Voi avete un prodotto favorito che conoscete sempre con sicurezza?

Oggi abbiamo strumenti digitali come il telefono cellulare e la calcolatrice o il computer che ci fanno le moltiplicazioni. Ma che cosa succederebbe se dovessimo fare una moltiplicazione e nessuno di tali strumenti fosse vicino? Bene, la gente ha pensato a questo anche nei tempi passati e ha trovato delle soluzioni. Un modo è quello di usare le vostre dita per la moltiplicazione.

Questo è un modo per moltiplicare un qualunque numero fra 5 e 10 con le vostre dita:

## Fingerfärdig multiplikation

FÖR  
TAL  
MELLAN  
5 OCH 10.

EXEMPEL  $6 \times 7$ .

HÅLL UPP ETT FINGER PÅ VÄNSTER HAND, DETTA SYMBOLISERAR  $5+1=6$ . HÅLL UPP TVÅ FINGRAR PÅ HÖGER HAND FÖR  $5+2=7$ .

MULTIPLICERA ANTALET FINGRAR SOM HÅLLS UPP MED 10.  
 $3 \times 10 = 30$ .

MULTIPLICERA SEDAN ANTALET FINGRAR SOM HÅLLS NERE PÅ VÄNSTER HAND (4) MED DE SOM HÅLLS NERE PÅ HÖGER (3).  
 $4 \times 3 = 12$ .



ADDERA:  $30 + 12 = 42$ . ALLTSÅ ÄR  $6 \times 7 = 42$ .

VARFÖR STÄMMER DET? PROVA IGEN MED ANDRA PRODUKTER.

Figura tratta da: Grevholm (1988), p. 19

*Vedere l'Allegato 1 per una traduzione dell'attività in inglese*

Provate e guardate se secondo voi funziona!

Questo metodo è stato mostrato una volta a un formatore da un insegnante di matematica che lo aveva imparato da alcune persone di etnia rom che erano andate a un corso di formazione degli adulti a Malmö in Svezia. Queste persone chiesero al loro insegnante di spiegare perché questo metodo funziona sempre. Lui non riuscì a dimostrarglielo e così lo chiese al formatore. Potete aiutare l'insegnante a spiegare perché il metodo funziona sempre?

Nei paesi nordici il metodo era conosciuto anche come la “moltiplicazione del pastore o del contadino” perché era sempre utile per chiunque non avesse disponibilità immediata di carta e matita.

[Commento per l'insegnante: La prova può essere fatta tramite la Early Algebra (vedere Allegato 3) o convincendosi che tutti i possibili casi sono verificabili tramite una prova sistematica, perché ci sono un numero limitato di casi.]

### Esercizi

1. Convincete voi stessi e il vostro peggior nemico del fatto che la moltiplicazione con le dita dà sempre risultati corretti se usata in maniera corretta. Spiegate al vostro insegnante come avete fatto.
2. Cercate di costruire una storia matematica in cui potete risolvere il problema con la moltiplicazione. Chiedete a un vostro amico di risolverlo. Confrontate i vostri diversi modi di pensare. Ne preferite uno in particolare? Perché?

### *Sessione 3*

Vi sono molti diversi modi di moltiplicare con le dita e la maggior parte di essi sono conosciuti fin da tempi lontani e provengono dalla tradizione di paesi differenti.

Andate su internet e fate una ricerca per “moltiplicazione con le dita” o “finger multiplication”. Che cosa c’è di diverso o di simile al modo mostrato qui? Sono disponibili delle dimostrazioni? Gli autori spiegano perché il metodo funziona? Trovate un metodo che preferite agli altri? Spiegate perché.

Ora, quando potete moltiplicare numeri fra il 5 e il 10 con le vostre dita, come potete ridurre la tabella triangolare della moltiplicazione semplicemente ai casi che avete bisogno di conoscere a memoria? Quante differenti moltiplicazioni ci sono? Scrivete la tabella ridotta.

Con una calcolatrice puoi trovare facilmente  $12 \cdot 14$ . Sarebbe possibile farlo anche con la moltiplicazione con le dita? Cercate di creare un modo per farlo. C’è qualcosa su internet riguardo alla moltiplicazione di numeri fra 11 e 15? Trovate qualcosa per numeri ancora più grandi?

Che cosa dicono i libri di storia della matematica riguardo alla moltiplicazione con le dita? Guardate, ad esempio, D. E. Smith, *History of mathematics*.

In quali Paesi trovate i diversi metodi per moltiplicare? Pensate al modo in cui questa abilità è stata appresa da una persona all’altra. Nei tempi antichi si è trattato della comunicazione orale e voi probabilmente avete mostrato come farlo in modo molto pratico. Potete perfino descriverlo a una persona che non parla la vostra lingua? Potete spiegarlo semplicemente usando gesti e segni. Oggi, se volete descrivere il metodo in forma scritta, come ad esempio in internet, ci vuole più fatica che mostrarlo semplicemente con le vostre dita. L’abilità della moltiplicazione con le dita sembra oggi essere stata dimenticata in molti Paesi. Perché questo? E perché chiediamo ai bambini a scuola di imparare una tabellina con  $10 \cdot 10$  moltiplicazioni, quando possiamo farla con molte meno operazioni?

### *Sessione finale*

L’insegnante e la classe possono fare una discussione di sintesi su ciò che è stato appreso.

Ecco alcuni esempi di ciò che può essere trattato:

- Quali proprietà della moltiplicazione abbiamo trovato?
- Sappiamo spiegare perché la tabella del 1601 appare così?
- Possiamo trovare le stesse proprietà per la divisione di numeri? Perché? Trovate esempi.
- E per l’addizione e la sottrazione? Che cosa pensate? Trovate esempi.
- Quale può essere la ragione per cui la moltiplicazione con le dita non è più ben conosciuta?

Un modo utile di gestire la discussione finale è partire dal far scrivere agli alunni il proprio punto di vista su ciò che hanno imparato e discuterne poi con l’intera classe.

### *Commenti per l'insegnante*

Gli alunni probabilmente conosceranno la proprietà commutativa, ma potrebbero non conoscerne il nome. Gli esercizi forniscono una opportunità di introdurre questa terminologia e anche, forse, per gli alunni di scoprire altre proprietà della moltiplicazione. Abbiamo fornito un po' di materiale aggiuntivo per l'insegnante come, ad esempio, la storia del libro del 1601 (Allegato 2), la dimostrazione algebrica (vedere Allegato 3), la dimostrazione sistematica, links a buoni siti sulla moltiplicazione con le dita, modi di moltiplicare numeri più grandi di 10 (Allegato 4), alcuni testi tratti da libri di storia riguardo alla moltiplicazione con le dita (Allegato 2) e così via.

Il lavoro è utile sotto l'aspetto della multiculturalità poiché noi sappiamo che è stato usato in gruppi di popolazioni molto differenti in Paesi diversi e per intervalli di tempo molto ampi, ed è un modo di lavorare che è stato trasmesso oralmente o tramite gesti nei tempi antichi, così da essere indipendente dalla lingua, ed è altamente concreto. Gli alunni possono chiedere della tabella ai genitori e ai nonni e vedere se conoscono le differenti tabelle. La tabella triangolare combinata con la moltiplicazione con le dita riduce un po' dell'apprendimento mnemonico delle operazioni nella tabellina della moltiplicazione. Dalla ricerca, noi sappiamo che la moltiplicazione sta nell'area di apprendimento in cui gli alunni hanno molte difficoltà.

La sperimentazione principale di questa attività didattica è stata fatta in Norvegia, in una scuola di Kristiansand e in una di Trondheim. Qui sotto sono le relazioni e i sommari dei risultati della sperimentazione principale.

#### **Informazioni generali:**

La sperimentazione principale è stata fatta da Kari Sofie Holvik e Camilla Normann Justnes e questa relazione si basa sulle loro relazioni scritte e sulle valutazioni fatte da loro. Le foto sono state fatte da Camilla Normann Justnes. In un incontro con una delle insegnanti prima della sperimentazione, si è discusso sui modi in cui l'attività didattica sarebbe stata utile per gli alunni. L'insegnante ha visto che era di grande aiuto per ripassare la moltiplicazione e ha suggerito anche che avrebbe potuto utilizzarla per preparare la fattorizzazione dei numeri che i suoi alunni avrebbero dovuto imparare verso la fine di quel quadrimestre. Per questo abbiamo aggiunto alcuni esercizi che riguardano la fattorizzazione. Infatti questi rendono esplicito il fatto che la moltiplicazione e la divisione sono operazioni inverse l'una dell'altra.

#### *Relazione dalla scuola di Karuss*

Una metà della classe ha imparato la moltiplicazione con le dita. Gli alunni sono rimasti affascinati e hanno pensato che fosse divertente. Gli è stato dato il compito di insegnarla a qualcun altro, ma tutti se ne erano dimenticati. Così, come insegnante, ho dovuto insegnarla al resto della classe dopo. Nessuno degli alunni ha usato il metodo in esame poiché avevano in testa la tabellina della moltiplicazione ed è più veloce da

usare. Se si ripete il metodo costantemente, potrebbe accadere che alcuni alunni possano usare il metodo in un compito, senza aiuti. Non vi è stata ragione né tempo per mostrare dimostrazioni ad alcuno. Ma mi piacerebbe continuare nella classe 9, quando studiamo l'algebra.

Nella lezione finale di questo progetto abbiamo esplorato altri metodi per la moltiplicazione. Gli alunni hanno usato internet e cercato altri metodi, per impararne almeno uno e mostrarlo poi alla classe. Hanno lavorato a coppie e sono stati molto interessati. Il metodo per loro più affascinante è stato il metodo giapponese, che dopo è stato mostrato su Facebook, con il quale si può contare e fare incroci (vedere il link). Questi sono alcuni dei metodi trovati:

- <http://vivas.us/i-promise-that-this-japanese-multiplication-technique-will-make-math-way-easier/>
- magic math for 7`s
- Multiplication, learning the times table (Mister numbers)
- No.swewe.com
- [Guro.sol.no/questions/naturvitenskap/matematikk/hvordan-multiplisere-firesifrede-tall-i-hodet](http://Guro.sol.no/questions/naturvitenskap/matematikk/hvordan-multiplisere-firesifrede-tall-i-hodet)

#### *Riflessioni su possibili modifiche...se usassi ancora l'unità didattica*

Gli alunni hanno avuto troppo poco tempo per lavorare su tutte le consegne e fare, dopo, un riassunto. La prossima volta utilizzerò un paio di domande, ad esempio 1, 2 and 3, se pensassi di utilizzarla per gli esami, e 5, 6 e 7 se volessi concentrarmi sulle ricerche. Un'altra opzione è differenziare le consegne. O distribuire le consegne in modo casuale e chiedere agli alunni di spiegare dopo gli uni agli altri in gruppi più numerosi. In ogni caso, è importante che essi abbiano il tempo per parlare insieme di matematica.

Avrei potuto usare più tempo (una lezione doppia) in modo da consentire a più alunni di apprendere di più. Il livello e il tipo di consegne sono risultati essere adatti al gruppo di alunni di quella età. L'unità didattica si collega bene al ripasso della fattorizzazione, alla fattorizzazione in numeri primi e ad altri concetti matematici (fattore, moltiplicazione, somma, etc.).

La lezione dopo la fine di questa unità didattica l'abbiamo dovuta utilizzare per studiare l'ultimo argomento (il volume) prima degli esami e la seconda lezione di questa settimana sarà utilizzata per fare esercizi su quell'argomento. Ma più tardi questa settimana cominceremo con il ripasso e allora farò riferimento a quello su cui abbiamo lavorato in questa unità didattica, dove si presterà, e forse chiederò se alcuni alunni avranno usato alcune delle altre tabelle per la moltiplicazione che hanno trovato.

Utilizzerò la moltiplicazione con le dita quando faremo il ripasso per l'esame nelle settimane 18 e 19, includendo la consegna 1. La dimostrazione matematica del perché

è corretta sarà distribuita ad alcuni alunni. E' troppo avanzata per la maggior parte degli alunni della classe 8.

La ricerca di altri metodi di moltiplicazione deve essere fatta dopo gli esami (settimana 21). Questi metodi sono più appropriati e adatti negli anni scolastici 4-6.

### Relazione dalla scuola di Saupstad

Qui l'insegnante ha svolto l'unità didattica in una classe del quinto anno e ha fornito appunti dettagliati del suo lavoro. Una lezione (di 45 minuti) è stata utilizzata per la prima sessione. Ha usato la prima sessione iniziando con il raccontare la storia del libro antico. Poi ha distribuito a ciascun alunno una copia della tabella della moltiplicazione con le dita e ha dato loro 5 minuti per studiarla. Dopo gli alunni hanno discusso a coppie e hanno fatto domande. L'insegnante ha preso appunti sulla lavagna.

Nella Foto 1 qui sotto è mostrata la traduzione degli appunti:

#### *Che cosa vediamo?*

- *Le volte. Possiamo trovare la risposta.*
- *Le tavole delle volte per 2-9.*
- *Le volte da sinistra a destra. Facendo le parti da destra verso sinistra.*
- *Sembra un triangolo.*

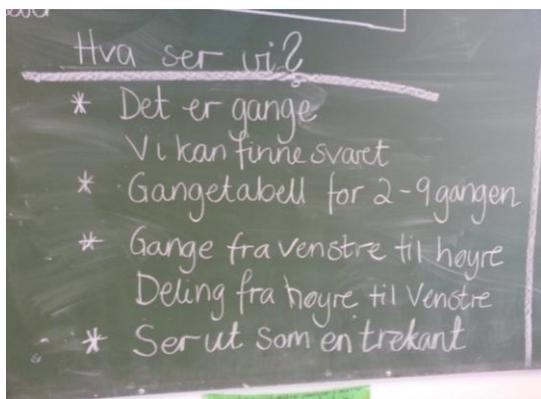


Foto 1: Risposte degli alunni a "Che cosa vediamo?"

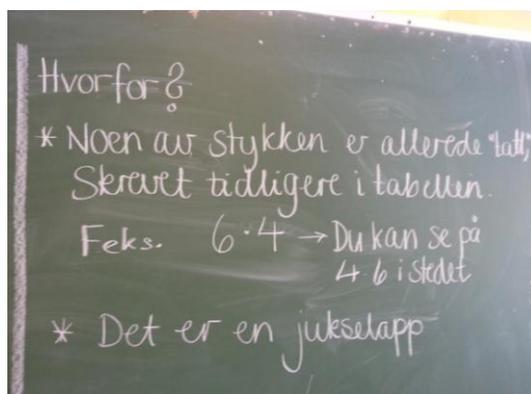


Foto 2: Risposte degli alunni a "Perché?"

Traduzione del testo nella Foto 2:

#### *Perché?*

- *Alcune cose sono già fatte. Scritte prima sulla tabella. Per esempio  $6 \cdot 4 \rightarrow$  si può guardare invece  $4 \cdot 6$ .*
- *E' un imbroglio...*

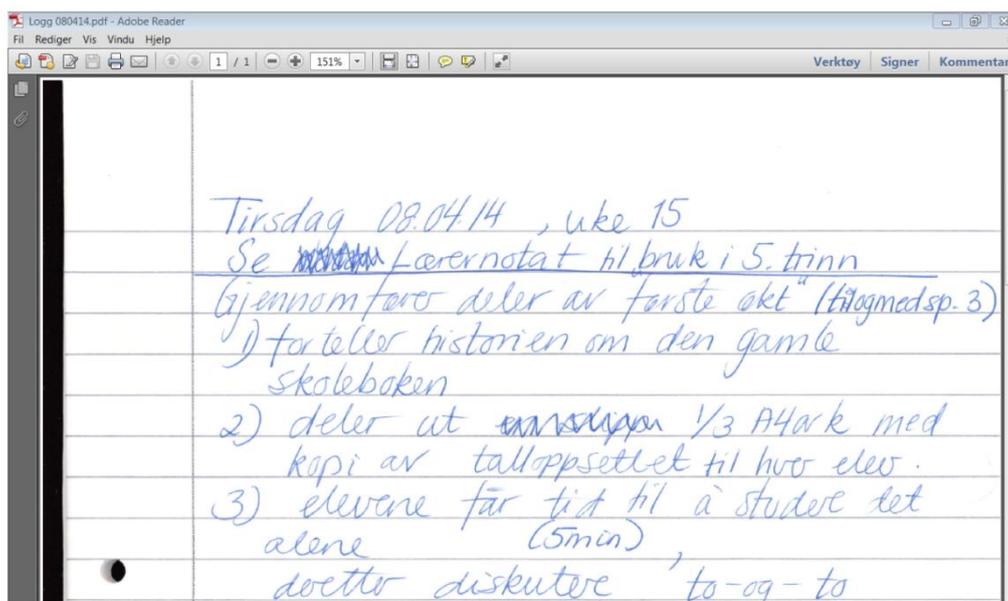


Foto 3. Parte degli appunti dell'insegnante per la sua progettazione dell'unità didattica.

Gli alunni sono stati molto partecipi nella discussione e alcuni di loro hanno voluto tenere la tabella della moltiplicazione con le dita sul loro banco per utilizzarla come strumento. Alcuni di loro l'hanno incollata sul proprio quaderno di matematica. Gli alunni, dopo, hanno fatto l'esercizio 1 e utilizzato la tabella per fare i calcoli.

## Conclusioni

In Norvegia gli insegnanti sono molto consapevoli della necessità di seguire il programma e svolgerlo per intero. Gli esami sono molto importanti e molto tempo viene utilizzato per prepararli. Una conseguenza di questo è che gli insegnanti spesso sentono di avere poca libertà e non osano fare altre cose che non siano quelle direttamente ed esplicitamente incluse nel programma. Per questo, non è così inaspettato che gli insegnanti che fanno la sperimentazione si rendano conto di non poter utilizzare molto tempo per una unità didattica di cui non vedono immediatamente come sia di supporto all'apprendimento degli alunni. Questo spiega perché l'insegnante nella scuola di Karuss non abbia potuto svolgere tutte le parti dell'unità didattica in sequenza, ma abbia dovuto ritornarvi sopra dopo. Nel caso della scuola di Saupstad, sfortunatamente, abbiamo avuto solo la relazione sulla prima sessione e il resto manca. Speriamo di poterla avere dopo.

Entrambi gli insegnanti riferiscono che gli alunni erano desiderosi di apprendere ed entusiasti della tabella numerica di forma triangolare. Gli alunni hanno voluto conservarla come strumento per i calcoli. E' interessante notare che, quando gli alunni vedono qualcosa che può essere loro di supporto e facilitarli nell'apprendimento, lo avvertono come un modo per imbrogliare. E' come se la matematica debba essere difficile.

Quando gli alunni hanno cercato metodi aggiuntivi per la moltiplicazione, è sembrato che avessero scoperto la matematica proveniente da differenti parti del mondo e differenti culture.

Dalle risposte degli alunni alle domande è ovvio che perfino nell'anno 8 essi usano una terminologia piuttosto acerba, come *volte* invece di moltiplicazione e *suddividere in parti* invece di dividere. Nelle sequenze didattiche come questa ci sono occasioni naturali di imparare meglio la terminologia, anche in lingue diverse.

Gli insegnanti insegnano in gruppi di età differenti, ciò nonostante entrambi hanno trovato il modo di utilizzare la proposta didattica in modo fruttuoso. Pertanto il livello di difficoltà e il livello di scelta dell'argomento può essere considerato appropriato.

## Seconda sperimentazione

di Andreas Ulovec<sup>\*\*</sup> e Therese Tomiska

### Informazioni generali

L'unità didattica è stata sperimentata da una insegnante di matematica con cinque anni di esperienza di insegnamento in una scuola secondaria superiore vicino a Vienna. Il gruppo di progetto austriaco ha inviato il materiale all'insegnante circa tre settimane prima della prevista attività di sperimentazione. L'insegnante aveva a disposizione per la sperimentazione una classe 5<sup>a</sup> (14-15 anni di età), una 6<sup>a</sup> (15-16) e una 8<sup>a</sup> (17-18). Dopo un incontro con il gruppo di progetto, l'insegnante ha scelto di condurre la sperimentazione durante una normale lezione (di 50 minuti) nella classe 6<sup>a</sup>. Hanno partecipato alla lezione otto studenti (di 17-18 anni di età), tre dei quali sono studenti immigrati; la lezione è stata video-registrata e osservata da un membro del gruppo di progetto austriaco. Dopo la sperimentazione è stata realizzata una intervista con l'insegnante.

### La sperimentazione in aula

L'insegnante ha condotto la *Sessione 1* come è descritta nel materiale norvegese consegnando fogli contenenti una tabella della moltiplicazione del 1601 e ha iniziato una discussione di gruppo su questa. La discussione è durata 12 minuti circa.



Discussione di gruppo sulla tabella della moltiplicazione L'insegnante ascolta le argomentazioni degli studenti

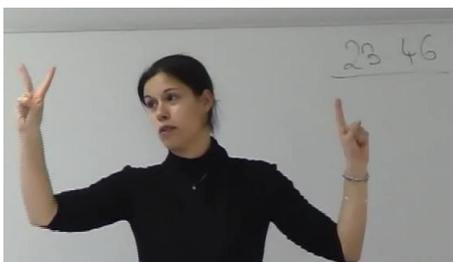
Gli studenti sono stati particolarmente interessati agli aspetti riguardanti il perché ci fosse necessità di tali tabelle, se tali tabelle esistessero nella storia della loro propria

---

<sup>\*\*</sup>Facoltà di Matematica – Università di Vienna, Austria.

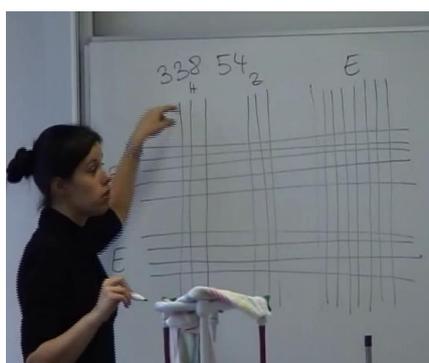
cultura e (dal punto di vista matematico) perché queste tabelle (ridotte) fossero sufficienti e contenessero gli stessi dati di base delle tradizionali tabelle per la moltiplicazione, a forma di matrice quadrata, che loro conoscono. Le informazioni riguardo ai vari aspetti sono state date in parte dall'insegnante, in parte gli studenti hanno utilizzato le risorse fornite da internet per ottenere ulteriori informazioni.

La *Sessione 2* è iniziata con la presentazione del metodo della moltiplicazione con le dita da parte dell'insegnante.



L'insegnante mostra e gli studenti provano la moltiplicazione con le dita

Agli studenti è stato poi chiesto di provare il metodo e – insieme all'insegnante – trovare una spiegazione di perché funziona (15 minuti). Gli studenti hanno proposto diverse spiegazioni e hanno voluto vedere se il metodo potesse essere esteso a numeri più grandi.



L'insegnante sostiene gli sforzi di generalizzazione degli studenti

Erano anche interessati a vedere se l'uso di queste o quelle moltiplicazioni "inusuali" fosse stato storicamente documentato. Due degli studenti immigrati (dalla Turchia) hanno parlato di un metodo moltiplicativo basato sulla geometria appartenente alla loro cultura, che l'insegnante ha allora spiegato meglio.

Come si può vedere, le quattro sessioni che erano state previste nel materiale della "Moltiplicazione con le dita" sono state entrate a far parte di una sola lezione. Poiché con i materiali non era stato dato un quadro di riferimento temporale e poiché gli studenti già conoscevano moltiplicazione, sistemi numerici e vari metodi algebrici, non è stata ritenuta necessaria una durata più lunga dell'unità didattica.

### **Intervista all'insegnante**

E' stata fatta un'intervista con l'insegnante, nel pomeriggio del giorno in cui si è svolta la sperimentazione. L'insegnante ha riferito che, durante l'intervallo che ha seguito immediatamente la lezione, agli studenti è stato chiesto dall'insegnante di parlare della loro esperienza con questa unità didattica. Sia gli studenti immigrati che

gli altri hanno risposto in maniera positiva. In particolare, gli studenti immigrati hanno parlato della opportunità di dare informazioni sulla loro cultura che gli altri studenti prima non conoscevano. Gli studenti non-immigrati hanno fatto commenti positivi sui vari riferimenti storici e culturali che di solito loro non ricevono durante le lezioni normali di matematica. L'insegnante ha accolto particolarmente bene la possibilità di avere vari punti di appoggio per i riferimenti culturali e l'opportunità di vedere che gli studenti immigrati non solo partecipavano, ma erano una sorgente di informazioni per gli altri studenti.

## **Conclusioni**

La sperimentazione ha mostrato chiaramente che gli studenti sono interessati ai contenuti matematici di differenti culture e che la partecipazione attiva degli studenti immigrati e l'introduzione del loro bagaglio culturale può arricchire la situazione didattica.

## **Terza sperimentazione**

di Hana Moraová\*\*\* e Jarmila Novotná\*\*\*

Luogo: ZŠ Fr. Plamínkové s RVJ, Prague

Data: 9 Settembre 2014

Classe: 3<sup>a</sup> (2 differenti classi)

Conoscenze: conoscenza delle tabelline della moltiplicazione fino a 5, una delle classi aveva già iniziato la moltiplicazione per 6 fino a 9 prima delle vacanze estive, alcuni alunni le ricordavano.

Le lezioni sono state svolte in inglese, sono stati preparati dei filmati per far vedere come usare la moltiplicazione con le dita, ma il proiettore non ha funzionato.

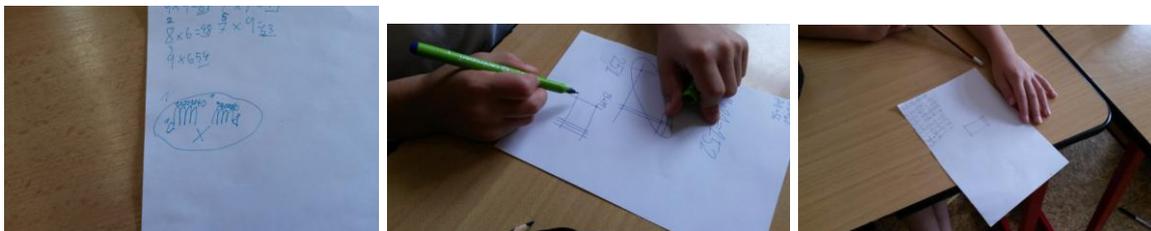
*Svolgimento di entrambe le lezioni*

- Ripasso dei numeri da 1 a 100
- Ripasso della moltiplicazione da 1 a 5
- Dimostrazione della moltiplicazione con le dita (da parte dell'insegnante) su due esempi. Usando le dita e la LIM.
- Gli alunni hanno chiesto di farlo, pochissimi hanno capito, due altri problemi sono stati risolti alla LIM, un alunno ha chiesto di venire, ha fatto in collaborazione con l'insegnante, l'alunno e il resto della classe che dettava i numeri.

---

\*\*\* Facoltà di Educazione - Charles University in Praga, Repubblica Ceca.

- Gli alunni hanno poi chiesto di lavorare da soli, con l'insegnante che osservava, aiutando individualmente coloro che ne avevano bisogno.
- Poi l'insegnante ha mostrato un altro magico trucco, la moltiplicazione di numeri a due cifre usando la retta dei numeri, agli alunni questo è piaciuto moltissimo e hanno capito più facilmente, meno conti, nessuna moltiplicazione, cioè più facile...



## Lezione 2: Novembre 2014

Una delle due **classi terze**, lezione CLIL.

**Warm up** – linee dei numeri, dicendo “bang” al posto dei numeri divisibili per 3, poi per 4.

**Introduzione** – ripasso della moltiplicazione con le dita (gli alunni ora hanno imparato le tabelline, semplicemente motivazione e divertimento).

**Attività principale:** *Vi farò vedere un trucco* – moltiplicazione in riga di numeri a due cifre, agli alunni era stata presentata nella lezione CLIL precedente.

**Materiali** – foglio di carta a quadretti (per rendere più facile disegnare le righe e anche per facilitare il lavoro pratico con unità, decine e centinaia che sono più grandi di dieci).

La prima moltiplicazione su linee viene controllata dall'insegnante, l'insegnante disegna il modello, gli alunni contano insieme il numero di punti di intersezione, numeri che non superano il dieci (in unità, decine, centinaia).

Moltiplicazioni simili vengono poi fatte individualmente (lo stesso insieme di numeri per tutti).

Poi vengono dati numeri a due cifre dove gli alunni devono fare somme di unità, decine, centinaia che superano il dieci, un primo esempio viene fatto insieme alla lavagna.

Dopo gli alunni lavorano da soli su un'altra coppia di numeri, l'insegnante osserva e verifica se hanno capito, lavora su possibili errori (gli alunni disegnano le righe troppo vicino e non riescono a vedere il confine fra la prima e la seconda cifra, gli alunni dimenticano di aggiungere le unità etc. maggiori di dieci).

Viene controllato il risultato e corretti possibili errori.

## Lezione 3: 13 Febbraio 2015

Breve registrazione video

**Warm up** – una canzone con numeri (solo per motivare e rompere il ghiaccio), linee dei numeri come nella lezione precedente.

**Introduzione:** ripasso della moltiplicazione di numeri a una cifra; si impara la parola “divisibile”; gli alunni ricevono una carta con un numero e dicono “Io sono un numero divisibile per ... e per ..., quale numero sono?”, chi risponde correttamente è il prossimo che “sarà” un numero.

Ripasso della moltiplicazione con le dita.

**Attività principale:**

1. una moltiplicazione di due numeri a due cifre su un foglio di carta, l’insegnante osserva e aiuta dove necessario.
2. il risultato viene preso e descritto come unità, decine, centinaia.
3. sulla lavagna viene scritto un numero più grande e descritto come decine di migliaia, migliaia, centinaia, decine, unità (iniziando dalle unità a partire da destra).
4. l’insegnante dà istruzioni agli alunni: *Prendete 5 matite di colore diverso dal vostro astuccio. L’insegnante prende 5 gessi diversi. Sottolineate le decine con un colore, ad esempio il blue. L’insegnante lo fa alla lavagna. Prendete un altro colore. Sottolineate le centinaia. L’insegnante sottolinea le centinaia sulla lavagna... Fino a quando gli alunni arrivano alle decine di migliaia.*
5. l’insegnante dà istruzioni agli alunni: *Ora moltiplichiamo numeri a tre cifre. E lo fa vedere alla lavagna, lentamente, passo passo, usando colori differenti per indicare unità, decine, centinaia e anche richiamando l’attenzione sulla difficoltà di avere più di dieci unità, decine, centinaia ... e come affrontarla.*
6. l’insegnante sceglie altri due numeri a tre cifre e chiede agli alunni di lavorare da soli, controllando con attenzione lo svolgimento, aiutandoli individualmente; gli alunni capiscono presto, alcuni di loro fanno la moltiplicazione molto rapidamente, così viene data un’altra coppia di numeri a tre cifre, il controllo continuo aiuta la maggioranza degli alunni a entrare nel meccanismo.
7. controllo comune dei numeri, ostacoli linguistici – alcuni alunni sanno dire in inglese solo i numeri fino a cento, l’insegnante scrive un numero sulla LIM come modello, la classe fa pratica.



warm up (ripasso della moltiplicazione con le dita)

## Un'altra sperimentazione: 24 Febbraio 2015

### Classe 4<sup>a</sup>, disegni, uso della LIM, stessa scuola

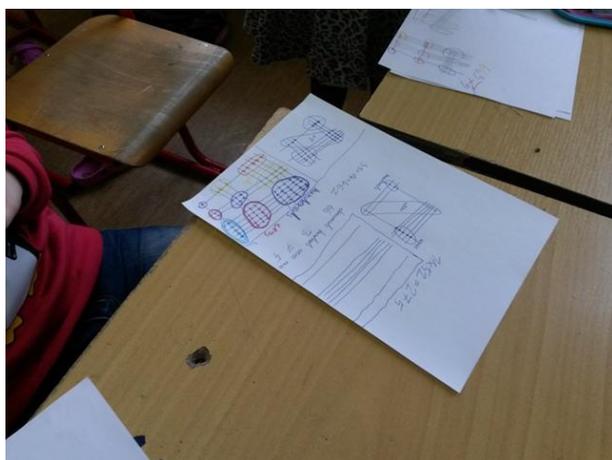
L'insegnante ha deciso di testare la stessa unità didattica con alunni di un anno più grandi (livello di inglese leggermente superiore e maggiore pratica nell'addizionare numeri più grandi). La classe conosce già le tabelline, così la lezione non si è basata sulla moltiplicazione con le dita ma sulla moltiplicazione con le linee, con numeri sia a due che a tre cifre, uso delle TIC.

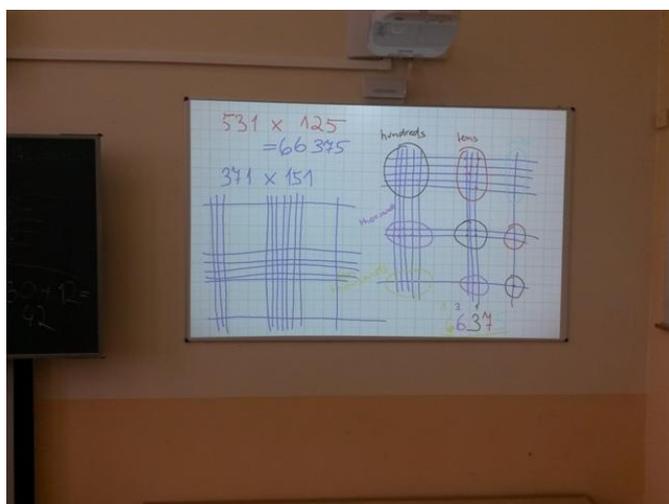
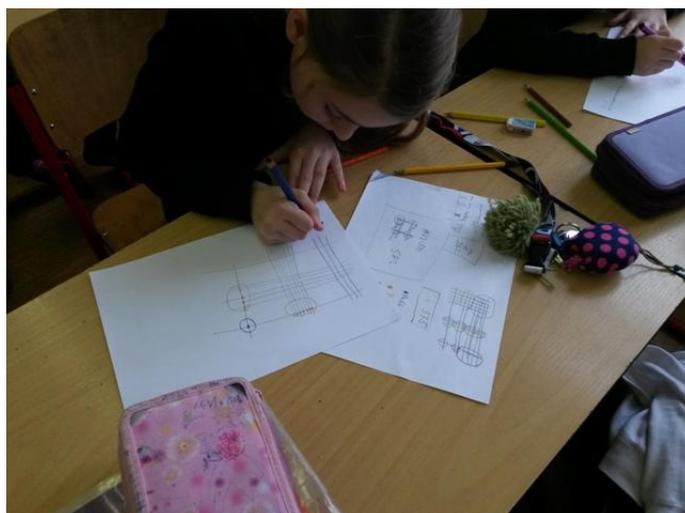
Obiettivo della lezione: esercitarsi a registrare i numeri come unità, decine, centinaia, migliaia e alla moltiplicazione e all'addizione, motivare, fare matematica in inglese.

**Warm up** – motivare e rompere il ghiaccio, mostrando la moltiplicazione con le dita, provandola con alcuni numeri.

**Attività principale** – apprendimento di nuovi modi di moltiplicare numeri più grandi.

1. introduzione della terminologia di base – unità, decine, centinaia ..., sommare, moltiplicare etc.
2. scelta di due numeri a due cifre, mostrando la regola della moltiplicazione sulle linee sulla LIM.
3. scelta di altri due numeri a due cifre, lavoro individuale, controllo attento da parte dell'insegnante; circa metà degli alunni hanno scoperto come lavorare con più di dieci unità, decine, centinaia e hanno trovato la soluzione corretta, il resto degli alunni sono stati aiutati individualmente dall'insegnante e tutto è stato mostrato sulla LIM – un alunno che ha finito prima ha disegnato le linee e il resto è stato fatto insieme prestando attenzione a cosa fare con unità, decine...quando ve ne sono più di dieci.
4. passaggio a numeri a tre cifre; di nuovo facendo uso di cinque colori differenti per unità, decine...; il primo esempio mostrato sulla LIM usando i differenti colori.
5. scelta di altri due numeri a tre cifre, gli alunni lavorano da soli, l'insegnante controlla e aiuta individualmente, controlla che gli alunni non mischino unità, decine, centinaia; circa metà degli alunni lo hanno trovato facile, gli altri hanno avuto bisogno di aiuto e supporto.





*L'insegnante ceca non ha riportato conclusioni specifiche.*

## Conclusioni dalle tre sperimentazioni

di Barbro Grevholm

Tutte le relazioni delle tre sperimentazioni mostrano come l'unità didattica abbia funzionato bene e potrebbe essere utilizzata in gruppi diversi di età dalla classe terza alla ottava. Gli alunni hanno lavorato con entusiasmo, interesse e rimanendo affascinati. Gli insegnanti sembra abbiano pensato a svolgere sia le attività proposte che attività simili sulla moltiplicazione che hanno trovato da soli. Gli insegnanti hanno utilizzato l'unità didattica anche per lavorare su lingua e terminologia, e hanno trovato collegamenti e connessioni fra la moltiplicazione ed altre aree della matematica. Gli aspetti storici sono stati ben usati e in alcuni casi gli alunni hanno dato un contributo con esperienze tratte dalla propria cultura. L'unità didattica è sembrata offrire qualcosa di nuovo e inesplorato nell'insegnamento che la ha preceduto. Molti alunni hanno voluto includere l'insieme triangolare dei numeri come strumento per le loro attività matematiche.

Un aspetto di criticità potrebbe essere quanto tempo utilizzare per una unità come questa. La risposta dipende moltissimo dal gruppo di età con cui l'insegnante sta lavorando e da sotto quale prospettiva l'unità didattica viene utilizzata, come ripasso, consolidamento o esplorazione.

Un altro aspetto su cui si può discutere è per quale fascia di età una unità come *Moltiplicazione con le dita* sia meglio utilizzabile. Questo dipende dal livello di difficoltà che l'insegnante stabilisce per le domande. E' ovviamente possibile utilizzarla dalla classe terza alla ottava. Alcuni insegnanti l'hanno utilizzata perfino in algebra, al primo anno di scuola secondaria superiore.

L'unità didattica può essere utilizzata per consentire agli alunni di contribuirvi con proprie esperienze e la creazione di consegne. Quando si tratta della moltiplicazione è, in generale, più difficile costruire problemi propri di quando si intende utilizzare l'addizione e la sottrazione. La costruzione di problemi può illuminare i differenti tipi di consegne con la moltiplicazione che usiamo normalmente a scuola (Verschaffel & De Corte, 1996).

### Bibliografia

- Grevholm, B. (1988). *Utmaningen. Problem och tankenötter i matematik*. [The challenge. Problems and mindnuts in Mathematics]. Malmö: Liber.
- Verschaffel, L. & De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. In *International handbook of mathematics education*, (pp. 99-137). Dordrecht: Kluwer academic Publishers.

## Allegati alla unità didattica “Moltiplicazione con le dita”

**Allegato 1:** Traduzione in inglese della consegna *Fingerfärdig multiplikation* (Grevholm, 1988)

### Handy multiplication

WITH THE  
NUMBERS  
BETWEEN  
5 AND 10

EXAMPLE  $6 \times 7$ .

LIFT UP ONE FINGER AT THE LEFT HAND, THIS SYMBOLISES  $5+1=6$ . LIFT UP TWO FINGERS AT THE RIGHT HAND FOR SYMBOLISING  $5+2=7$ .

MULTIPLY THE SUM OF THE FINGERS UP BY 10.  
 $3 \times 10 = 30$ .



THEN, MULTIPLY THE NUMBER OF THE FINGERS DOWN AT THE LEFT HAND (4) BY THE FINGERS DOWN AT THE RIGHT HAND (3).  
 $4 \times 3 = 12$ .

ADD THESE NUMBERS:  $30+12=42$ .  
THUS, THIS IS  $6 \times 7 = 42$ .

WHY IS THIS RIGHT?  
TRY AGAIN WITH THE OTHER NUMBERS.

## Allegato 2

**Il libro di Rizanesanders del 1601** (source SharezaHatami, 2014)

Il libro di Rizanesanders è stato chiamato *Recknekonsten, L'arte del calcolo*

Circa 412 anni fa (nel 1601) Hans Larsson Rizanesander ha scritto il primo libro di testo svedese per l'aritmetica. Una sola copia di questo libro, scritto a mano, *Recknekonsten*, è conservato nella Uppsala universitets bibliotek (biblioteca universitaria di Uppsala).

Una domanda interessante riguarda quanto spazio debba essere dato alla tavola della moltiplicazione nell'insegnamento.

La tavola di moltiplicazione di Rizanesanders si basa sulla proprietà commutativa della moltiplicazione; la tabella mostra in tutta la sua semplicità l'uso delle conoscenze sia matematiche che didattiche.

*La tabella della moltiplicazione di Rizanesanders in una versione più semplice*

Sotto mostriamo la tabella di Rizanesanders in una forma che è forse più adatta all'insegnamento di oggi. E' chiaramente visibile come la peggiore tabella sia la più semplice!

Tabella del 2	Tabella del 3	Tabella del 4	Tabella del 5	Tabella del 6	Tabella del 7	Tabella del 8	Tabella del 9
$2 \cdot 2 = 4$							
$2 \cdot 3 = 6$	$3 \cdot 3 = 9$						
$2 \cdot 4 = 8$	$3 \cdot 4 = 12$	$4 \cdot 4 = 16$					
$2 \cdot 5 = 10$	$3 \cdot 5 = 15$	$4 \cdot 5 = 20$	$5 \cdot 5 = 25$				
$2 \cdot 6 = 12$	$3 \cdot 6 = 18$	$4 \cdot 6 = 24$	$5 \cdot 6 = 30$	$6 \cdot 6 = 36$			
$2 \cdot 7 = 14$	$3 \cdot 7 = 21$	$4 \cdot 7 = 28$	$5 \cdot 7 = 35$	$6 \cdot 7 = 42$	$7 \cdot 7 = 49$		
$2 \cdot 8 = 16$	$3 \cdot 8 = 24$	$4 \cdot 8 = 32$	$5 \cdot 8 = 40$	$6 \cdot 8 = 48$	$7 \cdot 8 = 56$	$8 \cdot 8 = 64$	
$2 \cdot 9 = 18$	$3 \cdot 9 = 27$	$4 \cdot 9 = 36$	$5 \cdot 9 = 45$	$6 \cdot 9 = 54$	$7 \cdot 9 = 63$	$8 \cdot 9 = 72$	$9 \cdot 9 = 81$

Nella tabella di Rizanesanders le tabelline dell'uno e del dieci non vengono utilizzate. Uno può pensare che lui volesse che l'insegnante e gli alunni riflettessero insieme su questo. Lui usa semplicemente la proprietà commutativa della moltiplicazione per rimuovere tutte le moltiplicazioni che esistono più di una volta nella tabellina 10 x 10.

Una tabellina, simile a quella di Rizanesanders, si può trovare nel primo libro di testo di Aritmetica stampato in Svezia, quello scritto da Aurelius nel 1614. Un'altra tabellina simile esiste nel libro di testo di Nils Buddaeus' (1595-1653). La sua tabellina ci ricorda quella di Rizanesanders.

1									
2	4								
3	6	9							
4	8	12	16						
5	10	15	20	25					
6	12	18	24	30	36				
7	14	21	28	35	42	49			
8	16	24	32	40	48	56	64		
9	18	27	36	45	54	63	72	81	

Sotto, segnata in rosso si vede la tabellina del 2 e i successive colori mostrano le tabelline del 3, 4, 5, 6 7, 8 e, infine, quella del 9.

1
24
3 6 9
481216
51015 2025
612 18 243036
714 21 28 35 42 49
8 16 24 32 40 48 56 64
9 18 27 36 45 54 63 72 81

E' interessante chiedersi da dove gli autori del libro di testo svedese abbiano tratto l'idea di presentare la tabella in forma triangolare. Si potrebbe ipotizzare che sia venuta dalla Germania, visto che in quei tempi molti studiosi studiavano in università tedesche. In tal caso, da dove era arrivata in Germania? Al momento non lo sappiamo, ma sarebbe interessante cercare maggiori informazioni.

### Allegato 3

Pensiamo di voler moltiplicare due numeri a e b, entrambi compresi fra 5 e 10.

Seguendo le istruzioni, il numero di dita che solleveremmo sarebbe:

$$(a-5)+(b-5)=a+b-10$$

Moltiplichiamo questo numero per 10 e otteniamo  $10(a+b-10)$

Il numero di dita che teniamo basse sono  $(10-a)$  e  $(10-b)$  e moltiplichiamo questi numeri ottenendo  $(10-a) \cdot (10-b) = 100 - 10(a+b) + a \cdot b$

La somma di questi due numeri è  $10(a+b) - 100 + 100 - 10(a+b) + a \cdot b = a \cdot b$ , che è il prodotto che volevamo calcolare.

Abbiamo così provato che, qualsiasi siano i numeri a e b compresi fra 5 e 10, le istruzioni portano ad avere  $a \cdot b$  come prodotto.

## **Allegato 4**

Alcuni utili link sulla moltiplicazione con le dita:

[http://ncm.gu.se/media/namnaren/npn/arkiv\\_xtra/09\\_2/mattfolk.pdf](http://ncm.gu.se/media/namnaren/npn/arkiv_xtra/09_2/mattfolk.pdf)

<http://gwydir.demon.co.uk/jo/numbers/finger/multiply.htm>

[http://scimath.unl.edu/MIM/files/MATExamFiles/WestLynn\\_Final\\_070411\\_LA.pdf](http://scimath.unl.edu/MIM/files/MATExamFiles/WestLynn_Final_070411_LA.pdf)

<http://threesixty360.wordpress.com/2007/12/31/three-finger-tricks-for-multiplying/>

[http://www.dccc.edu/sites/default/files/faculty/sid\\_kolpas/mathteacherfingers.pdf](http://www.dccc.edu/sites/default/files/faculty/sid_kolpas/mathteacherfingers.pdf)